IV 15 de Marzo de 1904 Núm. 3

ANALES

DEL

INSTITUTO DE INJENIEROS DE CHILE

NOTAS RELATIVAS

A LA DEFORMACION DE LAS VIGAS RECTAS

La importante publicacion *Nouvelles Annales de la Construction*, trae en su número de Febrero de 1903 un interesante artículo debido al injeniero M. Gaston Blot, en el que considera el problema de la deformacion de las vigas rectas, i obtiene deducciones mui útiles para la aplicacion práctica de esta teoría.

El interes que ofrece a los injenieros el conocimiento de este problema, i mas que todo, las ventajas que para su solucion se obtienen con las conclusiones a que llega M. Blot, me ha animado a hacer una esposicion de este artículo, i a anotar al mismo tiempo algunas observaciones que de su estudio se desprenden.

Consideraciones jenerales.—La deformacion de las vigas rectas solicitadas por cargas dadas, como se sabe, puede apreciarse por el método gráfico o por el análisis.

El método gráfico permite deducir la fibra media de una pieza recta deformada, por la construccion de un polígono funicular, trazado en circunstancias especiales, i del cual tendremos ocasion de ocuparnos mas adelante.

El método analítico resuelve completamente el problema de la deformacion, i da medios de obtener los valores del descenso de la fibra neutra en un punto cualquiera de la pieza que se considera.

Los procedimientos citados ofrecen en su aplicacion diversas dificultades que provienen, por una parte, de las construcciones delicadas i de aproximacion limitada que constituyen los métodos gráficos, i por otra, de la complicacion que en muchos casos presenta el método analítico en la solucion del problema.

Pues bien, disminuir estas dificultades es el objeto del estudio de M. Blot, cuyo plan espone en las siguientes frases: «Nos proponemos buscar algunas propiedades inte-« resantes de la curva elástica susceptibles de simplificar el estudio de la deformacion « de las vigas rectas, i que permitan en particular, por la aplicacion de una fórmula sen-« cilla i práctica, determinar rigurosamente el valor de la flecha en un punto cualquiera.»

Ecuaciones jenerales de la deformacion.—(*) Consideremos una viga recta apoyada en sus dos estremos i cargada de una manera cualquiera. Sea l la luz i x la abcisa de un punto cualquiera a partir del oríjen, que se supondrá en el apoyo de la izquierda.

La ecuacion jeneral de las deformaciones tiene por espresion aproximada:

(*) Véase el artículo de M. Gaston Blot en la publicacion *Nouvelles Annales de la Construction*, Febrero i Marzo de 1903.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI} \tag{1}$$

la integracion de esta ecuacion da:

$$\frac{dy}{dx}=\int\frac{Mdx}{EI}+C \tag{2}$$

C es una constante que determinaremos mas adelante. Como $\frac{M}{EI}$ es una funcion de x, podemos escribir:

$$\frac{M}{EI}=f(x)$$

la ecuacion (2) se transforma en:

$$\frac{dy}{dx}=\int f(x)\,dx+C \tag{3}$$

$\int f(x)\,dx$ es una nueva funcion de x; hagamos:

$$\int f(x)\,dx=\int_1(x)$$

la ecuacion (3) toma, pues, la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\int_1(x)+C \tag{4}$$

la integracion de esta última ecuacion da:

$$y=\int_o^l f_1(x)\,dx+C\,x+C' \tag{5}$$

Notemos que para x=o se debe tener y=o; por consiguiente, C'=o.
De igual modo, para x=l, se tiene y=o, de donde:

$$o=\int_o^l f_1(x)\,dx+C\,l$$

por consiguiente:

$$C=-\frac{1}{l}\int_o^l f_1(x)\,dx$$

Introduzcamos estos valores en la ecuacion (5); se tendrá:

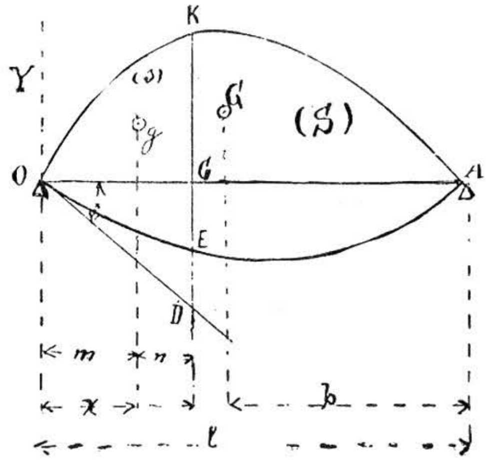
$$y=\int_o^x f_1(x)\,dx-\frac{x}{l}\int_o^l f_1(x)\,dx \tag{6}$$

La espresion

$$\frac{1}{l}\int_0^l f_1(x)\,dx$$

no es otra cosa que el valor de la tanjente a la fibra neutra deformada en el oríjen O de la luz. Esta tanjente es en efecto dada por la ecuacion (2), en la cual se hace x=o; y queda:

$$\frac{dy}{dx} = C = -\frac{1}{l}\int_0^l f_1(x)\,dx = \operatorname{tj}\alpha$$



(Fig. 1)

El segundo término $\frac{x}{l}\int_0^l f_1(x)\,dx$ o sea $x \operatorname{tj}\alpha$ de la ecuacion (6) es, pues, la ecuacion de la línea OD.

La ecuacion (6) puede, por consiguiente, espresarse bajo la forma simplificada siguiente:

(7) $$y = f_2(x) - x \operatorname{tj}\alpha$$

La flecha C E en un punto C de la viga es, pues, igual a la ordenada correspondiente de la recta OD disminuida de la cantidad E D.

Cálculo de la flecha en un punto cualquiera.—Vamos a tratar, por medio de algunas transformaciones, de dar a la ecuacion (7) una interpretacion fácil i práctica.

Refiriéndonos en efecto a los cálculos precedentes, se nota que la espresion

$$f_1(x) \qquad o \qquad \int f(x)\,dx \qquad o\ aun \qquad \int \frac{M\,dx}{EI}$$

representa la superficie de la curva de los $\frac{M}{EI}$ desde el oríjen hasta la ordenada C K (ver figura 1).

Sea s esta superficie OCK:

$$s = \int f(x)\,dx = f_1(x)$$

por consiguiente:

$$\int f_1(x)\,d\,x = \int s\,d\,x$$

$$= s\,x - \int x\,ds$$

$$= s\,x - \int x\,f(x)\,d\,x$$

el término $\int x\,f(x)\,dx$ representa la suma de los momentos, respecto al oríjen O, de las superficies elementales de la curva de los $\frac{M}{E\,I}$

Sea m la abcisa del centro de gravedad g de la superficie s.

Se puede escribir:

$$\int x\,f(x)\,dx = s\,m$$

El primer término del segundo miembro de la ecuacion (6) se trasforma en:

$$\int_o^x f_1\,(x)\,d\,x = s\,x - s\,m$$

$$= s\,(x - m)$$

$$= s\,n$$

Igualmente, si designamos por S la superficie total O K A de la curva de los $\frac{M}{E\,I}$ i por b la distancia de su centro de gravedad G a la estremidad A de la viga, se ve inmediatamente que el segundo término $\frac{x}{l}\int_o^l f_1\,(x)\,dx$ de la ecuacion (6) puede escribirse:

$$\frac{x}{l}\int_o^l f_1\,(x)\,dx = S\,b \times \frac{x}{l}$$

La ecuacion (6) tomará, pues, la forma:

$$y = s\,n - \frac{S\,b}{l} \times x \tag{8}$$

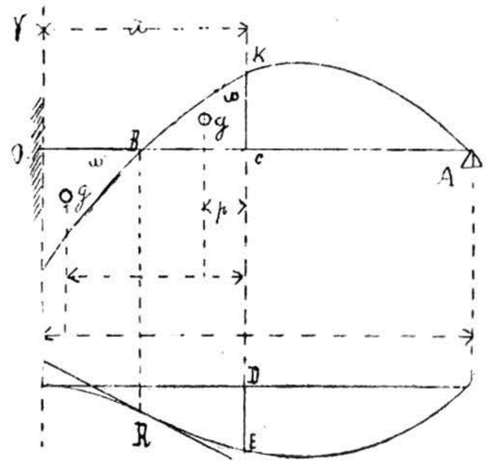
$\frac{S\,b}{l}$ (ver ecuacion 7) es la espresion de la tanjente a en el oríjen de la fibra neutra deformada; $\frac{S\,b}{l} \times x$ es la ecuacion de la tanjente O D.

La ecuacion (8) se puede traducir del modo siguiente:

La flecha $y = C\,E$, que toma una viga recta en un punto cualquiera C, bajo la influencia de las cargas que le solicitan, es igual a la ordenada correspondiente C D de la tanjente o D en el oríjen a la curva deformada, disminuida de la cantidad D E, es decir, del producto de la superficie s o OCK de la curva de los $\frac{M}{E\,I}$, comprendida entre el oríjen O i la ordenada C K, por la distancia n de esta ordenada al centro de gravedad g de la superficie s.

Esta regla es jeneral, i la ecuacion (8) se aplica no solo a las vigas rectas apoyadas libremente en sus estremos, sino tambien a aquellas que tienen una o dos de sus estremidades encastradas.

Para hacer ver la interpretacion que se debe dar a la ecuacion (8) en este último caso, consideremos por ejemplo una viga recta O A, encastrada perfectamente en uno de sus estremos o i apoyada libremente en el otro A (fig. 2). Podemos ademas suponer esta viga de seccion variable i cargada de una manera cualquiera.



(Fig. 2)

Sea M B N A la curva de los $\frac{M}{EI}$; la superficie O M B situada por debajo del eje de las x es dado por los momentos de flexion negativos; la parte superior B N A por los momentos flexantes positivos.

En el punto B, donde el momento de flexion es nulo, corresponde un punto de inflexion R de la curva elástica.

Propongámonos calcular la flecha que toma la viga en C. Ella es igual a la ordenada D E de la fibra neutra deformada.

El encastramiento perfecto de la viga en O tiene por efecto mantener horizontal la tanjente de la curva elástica en ese punto; el segundo término $\frac{S\,b}{l} \times x$ del segundo miembro de la ecuacion (8), es pues nulo, i el valor de la flecha en C se reduce a la espresion:

$$(9) \qquad y = s\, n$$

Representemos por ω i ω' las dos superficies B K C i M O B. Sean p i p' las distancias de los centros de gravedad g' i g' de estas superficies a la ordenada C K.

Se ve inmediatamente que la igualdad (9) puede escribirse:

$$y = \omega\, p - \omega'\, p'.$$

Observaciones.—La teoría jeneral i las conclusiones que M. Blot ha obtenido, sujieren algunas observaciones interesantes que conviene considerar, pues ellas contribuirán a fijar las ideas en la solucion del problema que nos ocupa.

Estas consideraciones se refieren a la relacion i analojía que existen entre las deducciones a que ha llegado M. Blot i los procedimientos jeneralmente empleados.

Desde luego, esta investigacion es lójica, pues el nuevo procedimiento, segun su mismo autor lo espresa, no es sino una fácil aplicacion de diversas propiedades de la curva elástica.

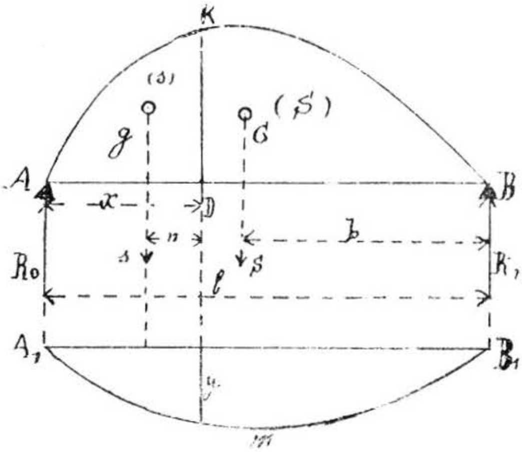
En efecto, la fórmula en cuestion puede considerarse como una injeniosa trasformacion de los resultados que proporcionan los métodos clásicos analíticos, lo que claramente se ve en el análisis de M. Blot.

Queda entónces liminado el estudio, a la comparacion de los métodos gráficos con la fórmula de que se trata.

El trazado gráfico, debido al profesor Mohr, tiene su base en el siguiente principio: «La fibra media de una pieza prismática deformada por flexion, afecta la forma de un lu-« gar de momentos, construido con una distancia polar igual a E I, i considerando la pieza « cargada por la superficie continua de los momentos de flexion.»

Esta teoría, segun sabemos, ha sido deducida de la analojía que existe entre la espresion que relaciona la inclinacion del lugar de momentos con el esfuerzo de corte, i la que relaciona la inclinacion de la elástica con la superficie de momentos.

El principio de Mohr induce a considerar la pieza A B (fig. 3), cuya deformacion se quiere determinar, como solicitada por la carga ficticia representada por la superficie A K B del lugar de momentos. Esta carga produciria en los apoyos A i B las reacciones R_0 i R_1, respectivamente.



(Fig. 3)

Segun dicho principio, la fibra deformada se obtendria en el polígono funicular A_1 m B_1, trazado con un radio polar E I, i correspondiente a las cargas A K B; en este polígono, una ordenada cualquiera y, es el descenso de la fibra media para la abcisa correspondiente x, i tambien el valor del momento que todas las fuerzas solicitantes producen en esa seccion x, dividido por la distancia polar E I.

Sea S el área total A K B i s el área de A K D, tenemos que el valor de la ordenada y será:

$$y=\frac{1}{E\,I}\left(-M_x^{to}\,R_o+M_x^{to}\,s\right)$$

Siendo G i g los centros de gravedad respectivos de S i s, así como b i n las distancias indicadas en la figura 3, se tiene:

$$R_o=\frac{S}{l}\,b$$

luego:

$$y=\frac{I}{E\,I}\left(-\frac{S}{l}\,b\,x+s\,n\right)$$

La fórmula que hemos obtenido, es pues idéntica a la que deduce analíticamente M. Blot.

Antes de terminar, debemos referirnos a las observaciones que sujiere la aplicacion práctica del método espuesto, i a las ventajas que en muchos casos puede presentar la solucion combinada de dicho método i de los procedimientos gráficos que de ordinario se usan para la determinacion de las flechas.

En efecto, en los casos sencillos de solicitacion, tales como el de una fuerza concentrada, fuerzas simétricas, cargas uniformes etc., una fácil operacion permite obtener el valor de los elementos necesarios para la aplicacion de la fórmula que dá el valor de la flecha en un punto cualquiera.

Pero, en casos de solicitacion cualesquiera, mas o ménos complicada, en que la determinacion analítica de la superficie de momentos se dificulta, el trazado gráfico de un lugar de momentos permite avaluar, por el planímetro o de otra manera, las superficies de ese lugar, cuyo valor es necesario para la aplicacion de dicha fórmula. Se tiene así, una combinacion del método espuesto con el procedimiento gráfico, que simplifica a éste, i que tiene especial interes cuando se trate, no de construir la elástica, sino de fijar la flecha en un punto dado.

Por lo demas, en el artículo de M Blot, vienen algunas aplicaciones que estimamos interesante consultar.

RUPERTO ECHEVERRÍA S.,
Injeniero Civil.

Santiago, Marzo de 1904.