El Catálogo Fotográfico del Cielo

Fórmulas para convertir las coordenadas rectilíneas de las estrellas de las placas fotográficas en coordenadas ecuatoriales, y aplicación de esas fórmulas a una de las placas de la zona encomendada al Observatorio Astronómico de Santiago.

POR

ISMAEL GAJARDO REYES

Sub-director del Observatorio Astronómico Nacional y Jefe de la Seccion Astrofotográfica

(Trabajo leido en el *Instituto de Ingenieros de Chile*, el Martes 4 de Agosto de 1917).

(Continuación)

De las del grupo (C) sacamos:

$$(F)\ldots\ \ldots \left\{ \begin{array}{l} \tan(\alpha - \alpha_0) = \tan x_1 \sec(\delta_0 + y) = \xi \cos y \sec(\delta_0 + y) \\ \tan \delta = \cos(\alpha - \alpha_0) \tan(\delta_0 + y) \end{array} \right.$$

Ahora vamos a demostrar que

$$\sqrt{1 + \eta^2} \, . \, \text{sen}\, y = \eta$$

En efecto, substituyendo resulta:

$$\sqrt{1 + \tan^2 y} \, . \, \text{sen}\, y = \tan y$$

$$\sqrt{\frac{\text{sen}^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} \, . \, \text{sen}\, y = \tan y$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}} \, . \, \text{sen}\, y = \tan y$$

$$\frac{\text{sen}\, y}{\cos y} = \tan y$$

Vamos a demostrar también que

$$\sqrt{1+\eta^2}\,.\cos y = 1$$

En efecto, substituyendo tenemos:

$$\sqrt{1+\tan^2 y}\,.\cos y = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y.}}\,.\cos y$$

$$» \qquad = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}}\,.\cos y$$

$$» \qquad = \frac{1}{\cos y}\,.\cos y = 1$$

Del mismo modo.

$$\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\,.\operatorname{sen} x_1 = \xi$$

En efecto, substituyendo tenemos:

$$\sqrt{1+\tan^2 x+\tan^2 y}\,.\operatorname{sen} x_1 = \tan x$$

de donde

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}+\tan^2 x}\,.\operatorname{sen} x_1 = \tan x$$

$$\sqrt{\frac{1+\tan^2 x\cos^2 y}{\cos y}}\,.\operatorname{sen} x_1 = \tan x$$

$$\sqrt{1+\tan^2 x\cos^2 y}\,.\operatorname{sen} x_1 = \tan x\cos y$$

Pero, según las fórmulas del grupo (E),

$$\tan x\cos y = \tan x_1$$
$$\tan^2 x\cos^2 y = \tan^2 x_1$$

Entonces

$$\sqrt{1 + \tan^2 x \cos^2 y} \,.\, \text{sen}\, x_1 = \tan x \cos y$$

se convierte en

$$\sqrt{1 + \tan^2 x_1} \,.\, \text{sen}\, x_1 = \tan x_1$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x_1}} \,.\, \text{sen}\, x_1 = \tan x_1$$

$$\frac{\text{sen}\, x_1}{\cos x_1} = \tan x_1$$

Del mismo modo

$$\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} \,.\, \cos x_1 = \sqrt{1 + \eta^2}$$

En efecto, substituyendo tenemos:

$$\sqrt{1 + \tan^2 x + \tan^2 y} \,.\, \cos x_1 = \sqrt{1 + \tan^2 y}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} + \tan^2 x} \,.\, \cos x_1 = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}}$$

$$\sqrt{\frac{1 + \tan^2 x \cos^2 y}{\cos y}} \,.\, \cos x_1 = \frac{1}{\cos y}$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 x_1} \,.\, \cos x_1 = \frac{1}{\cos y} \,.\, \cos y$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x_1}} \,.\, \cos x_1 = 1$$

$$\frac{\cos x_1}{\cos x_1} = 1$$

$$1 = 1$$

En resumen, se tendrán las siguientes expresiones:

$$\sqrt{1 + \eta^2} \;.\; \operatorname{sen} y = \eta$$

$$\sqrt{1 + \eta^2} \;.\; \cos y = 1$$

$$\sqrt{1 + \xi^2 + \eta} \;.\; \operatorname{sen} x_1 = \xi$$

$$\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} \;.\; \cos x_1 = \sqrt{1 + \eta^2}$$

Ahora, substituyendo estos últimos valores en los de las fórmulas del grupo (C), después de hacer el desarrollo de sen $(\delta_0 + y)$ y de cos $(\delta_0 + y)$, se tendrá:

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \delta_0 \cos y \cos x_1 + \cos \delta_0 \operatorname{sen} y \cos x_1$$

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \delta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} + \cos \delta_0 \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}$$

de donde

$$\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} \;.\; \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \delta_0 + \eta \cos \delta_0$$

Del mismo modo

$$\cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - \alpha_0) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}}$$

de donde

$$\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} \;.\; \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - \alpha_0) = \xi$$

También tenemos:

$$\cos\delta\cos(a-a_0)=\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\left\{\cos\delta_0\cos y-\operatorname{sen}\delta_0\operatorname{sen}y\right\}$$

de donde

$$\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\,.\cos\delta\cos(a-a_0)=\sqrt{1+\eta^2}\left\{\frac{\cos\delta_0}{\sqrt{1+\eta^2}}-\operatorname{sen}\delta_0\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\right\}$$

$$\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\,.\cos\delta\cos(a-a_0)=\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0$$

En resumen, las fórmulas del grupo (C) se convierten en estas otras:

$$(G)\ldots\begin{cases}\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\operatorname{sen}\delta=\operatorname{sen}\delta_0+\eta\cos\delta_0\\ \sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\cos\delta\operatorname{sen}(a-a_0)=\xi\\ \sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\cos\delta\cos(a-a_0)=\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0\end{cases}$$

Dividiendo la segunda de estas ecuaciones por la tercera obtenemos:

$$(H)\ldots\ldots\tan(a-a_0)=\frac{\xi}{\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0}=\frac{\xi\sec\delta_0}{1-\eta\tan\delta_0}$$

Elevando al cuadrado las dos últimas ecuaciones del grupo (G) y sumándolas miembro a miembro se tendrá:

$$(1+\xi^2+\eta^2)\cos^2\delta\left\{\operatorname{sen}^2(a-a_0)+\cos^2(a-a_0)\right\}=\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2$$

de donde

$$(I)\ldots\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\,.\cos\delta=\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}$$

Ahora, multiplicando la primera ecuación del grupo (G) por $\cos\delta_0$, la ecuación (I) por $\operatorname{sen}\delta_0$ y restándolas miembro a miembro, resulta:

$$\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\,(\operatorname{sen}\delta\cos\delta_0-\cos\delta\operatorname{sen}\delta_0)=\cos\delta_0(\operatorname{sen}\delta_0+\eta\cos\delta_0)-$$

$$-\operatorname{sen}\delta_0\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}$$

de donde

$$\text{(J)}\quad \sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\,.\operatorname{sen}(\delta-\delta_0)=\cos\delta_0(\operatorname{sen}\delta_0+\eta\cos\delta_0)-\operatorname{sen}\delta_0\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}$$

Pero

$$\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}=\sqrt{\xi^2+\cos^2\delta_0-2\,\eta\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0+\eta^2\operatorname{sen}^2\delta_0}$$

Ahora, sumando y restando $\operatorname{sen}^2\delta_0$ a los términos subradical del segundo miembro de esta ecuación, se tendrá;

$$\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}=\sqrt{\xi^2+\cos^2\delta_0+\operatorname{sen}^2\delta_0-\operatorname{sen}^2\delta_0-2\,\eta\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0+\eta^2\operatorname{sen}^2\delta_0}$$

$$\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}=\sqrt{\xi^2+\cos^2\delta_0+\operatorname{sen}^2\delta_0\,(1+\eta^2)-\operatorname{sen}^2\delta_0-2\,\eta\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0}$$

$$\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}=\sqrt{\xi^2+\cos^2\delta_0+(1-\cos^2\delta_0)\,(1+\eta^2)-\operatorname{sen}^2\delta_0-2\,\eta\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0}$$

$$\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}=\sqrt{\xi^2+\cos^2\delta_0+1+\eta^2-\cos^2\delta_0-\eta^2\cos^2\delta_0-\operatorname{sen}^2\delta_0-2\,\eta\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0}$$

O bien

$$\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}=\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-\operatorname{sen}^2\delta_0-2\,\eta\operatorname{sen}\delta_0\cos\delta_0-\eta^2\cos^2\delta_0}$$

De donde

$$\sqrt{\xi^2+(\cos\delta_0-\eta\operatorname{sen}\delta_0)^2}=\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-(\operatorname{sen}\delta_0+\eta\cos\delta_0)^2}$$

Entonces la ecuación (J) se convierte en

$$\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}\ \text{sen}\,(\delta-\delta_0) = \cos\delta_0\,(\text{sen}\,\delta_0+\eta\cos\delta_0) - \\ -\text{sen}\,\delta_0\sqrt{1+\xi^2+\eta^2-(\text{sen}\,\delta_0+\eta\cos\delta_0)^2}$$

de donde

$$\text{sen}\,(\delta-\delta_0) = \cos\delta_0\,(\text{sen}\,\delta_0+\eta\cos\delta_0)\,(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}} - \\ -\text{sen}\,\delta_0\,(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\xi^2+\eta^2-(\text{sen}\,\delta_0+\eta\cos\delta_0)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

En resumen, se tiene el siguiente importante grupo de ecuaciones, que determinan las coordenadas ecuatoriales (α, δ) de las estrellas en términos de ξ y η

$$\left.\begin{aligned} \tan\,(\alpha-\alpha_0) &= \frac{\xi\sec\delta_0}{1-\eta\tan\delta_0} \\ \text{sen}\,(\delta-\delta_0) &= \cos\delta_0\,(\text{sen}\,\delta_0+\eta\cos\delta_0)\,(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}} - \\ &\quad -\text{sen}\,\delta_0\,(1+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\xi^2+\eta^2-(\text{sen}\,\delta_0+\eta\cos\delta_0)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}(3)$$

Pero estas últimas fórmulas no son cómodas para el cálculo de las coordenadas esféricas. Por esta razón se desarrollan en serie, según las potencias de ξ, η.

Ahora, el análisis trigonométrico nos enseña que el desarrollo en serie de la *función circular inversa arc tan* x es: (*)

(*) La teoría elemental de las *funciones inversas* es la que sigue:
Sea C D el *radio trigonométrico* y B D el arco que mide el ángulo B C D; bajemos A D perpendicular a C D (Fig. 4)

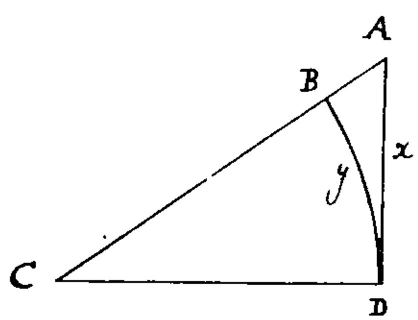

Fig. 4

$\therefore$ A D = tan B D

$$\text{arc tan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Luego, aplicando este desarrollo en serie a la primera fórmula del grupo (3), se tiene:

$$(\alpha - \alpha_0) = \frac{\xi \sec \delta_0}{1 - \eta \tan \delta_0} - \frac{1}{3}\,\frac{\xi^3 \sec^3 \delta_0}{(1 - \eta \tan \delta_0)^3} + \ldots.$$

o

$$(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 = \xi\,(1 - \eta \tan \delta_0)^{-1} - \tfrac{1}{3}\,\xi^3 \sec^2 \delta_0\,(1 - \eta \tan \delta_0)^{-3} \ldots..$$

$$(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 = \xi + \xi\,\eta \tan \delta_0 + \xi\,\eta^2 \tan^2 \delta_0 - \tfrac{1}{3}\,\xi^3 \sec^2 \delta_0$$

$$(\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0 = \xi + \xi\,\eta \tan \delta_0 \operatorname{sen} 1'' + \xi\,\eta^2 \tan^2 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' -$$

$$- \tfrac{1}{3}\,\xi^3 \sec^2 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1''$$

de donde

$$(\alpha - \alpha_0) = \xi \sec \delta_0 + \xi\,\eta \sec \delta_0 \tan \delta_0 \operatorname{sen} 1'' + \xi\,\eta^2 \sec \delta_0 \tan^2 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' -$$

$$- \tfrac{1}{3}\,\xi^3 \sec^3 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' \ldots..$$

El desarrollo de la 2.ª fórmula de las del grupo (3) es algo más complicado y tenemos necesariamente que hacer varios desarrollos parciales.

Se denota, en esta expresión, que B D es el arco cuya tangente es A D, escribiendo

B D = arc tan A D,

lo que se lee

B D es igual al arco cuya tangente es A D

Sea, en general, x la tangente del arco y,

$$x = \tan y \;\therefore\; y = \text{arc tan } x$$

La segunda expresión es la *función circular inversa de la primera*, y ésta es la *función circular directa.*

El símbolo arc tan x designa simplemente *un arco* o *un ángulo* y se lee el arco cuya tangente es x.

Repitamos primeramente esa fórmula:

$$\operatorname{sen}(\delta - \delta_0) = \cos\delta_0 (\operatorname{sen}\delta_0 + \eta\cos\delta_0)(1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}} -$$

$$-\operatorname{sen}\delta_0 (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \xi^2 + \eta^2 - (\operatorname{sen}\delta_0 + \eta\cos\delta_0)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Pero, según el desarrollo en serie de las funciones inversas, sabemos que:

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \ldots\ldots$$

Entonces

$$(\delta - \delta_0) = \text{arc sen} \left\{ \cos\delta_0 \ldots\ldots \ldots \ldots\ldots \right\}$$

$$(\delta - \delta_0) = \left\{ \cos\delta_0 \ldots\ldots \right\} + \frac{1}{6} \left\{ \cos\delta_0 \ldots \ldots\ldots \right\}^3 + \ldots\ldots\ldots \ldots$$

Y, desarrollando el primer término entre corchetes, tendremos:

$$\delta - \delta_0 = \cos^2\delta_0 (\tan\delta_0 + \eta)(1 - \frac{1}{2}\xi^2 \quad \frac{1}{2}\eta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots) -$$

$$-\operatorname{sen}\delta_0 (1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 \ldots\ldots) \left\{ 1 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cos^2\delta_0 (\tan\delta_0 + \eta)^2 + \ldots \right\}$$

Ahora bien, reemplazando $\cos^2\delta_0$ por $1 - \operatorname{sen}^2\delta_0$, se tendrá esta otra expresión.

$$\delta - \delta_0 = (\tan\delta_0 + \eta)(1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 \ldots\ldots) - \operatorname{sen}^2\delta_0 (\tan\delta_0 + \eta)$$

$$(1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 \ldots) -$$

$$-\operatorname{sen}\delta_0 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\delta_0 \cos^2\delta_0 (\tan\delta_0 + \eta)^2 (1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 \ldots)$$

$$\ldots) + \frac{1}{6} \left\{ \cos^2\delta_0 \ldots \right\}^3$$

Y por medio de otras sencillas reducciones se tendrá sucesivamente:

$$\delta - \delta_0 = (\tan \delta_0 + \eta)\,(1 - \tfrac{1}{2}\,\xi^2 - \tfrac{1}{2}\,\eta^2 \,\ldots\ldots) -$$

$$-\operatorname{sen} \delta_0 - (1 - \tfrac{1}{2}\,\xi^2 - \tfrac{1}{2}\,\eta^2)\,(\tan \delta_0 + \eta) \operatorname{sen} \delta_0 \,\{$$

$$\{ \operatorname{sen} \delta_0 - \tfrac{1}{2} \cos^2 \delta_0 \,(\tan \delta_0 + \eta) \} + \tfrac{1}{6} \{ \cos^2 \delta_0 \ldots\ldots \}^3$$

$$\delta - \delta_0 = \eta - \tfrac{1}{2}\,\xi^2 \tan \delta_0 - \tfrac{1}{2}\,\eta^3 - \tfrac{1}{2}\,\xi^2\,\eta + \tan \delta_0 - \tfrac{1}{2}\,\eta^2 \tan \delta_0 -$$

$$-\operatorname{sen} \delta_0 - (1 - \tfrac{1}{2}\,\xi^2 - \tfrac{1}{2}\,\eta^2 \ldots\ldots) + \tfrac{1}{6} \{ \eta^3 \ldots\ldots\ldots \}$$

Prosiguiendo el desarrollo, se llegará por fin a la fórmula.

$$\delta - \delta_0 = \eta - \tfrac{1}{2}\,\xi^2 \tan \delta_0 - \tfrac{1}{2}\,\xi^2\,\eta \sec^2 \delta_0 - \tfrac{1}{3}\,\eta^3 \ldots\ldots$$

o bien

$$\delta - \delta_0 = \eta - \tfrac{1}{2}\,\xi^2 \tan \delta_0 \operatorname{sen} 1'' - \tfrac{1}{2}\,\xi^2\,\eta \sec^2 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' - \tfrac{1}{3}\,\eta^3 \operatorname{sen}^2 1'' \ldots$$

En resumen, se obtienen las siguientes importantes fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= \xi \sec \delta + \xi\,\eta \sec \delta_0 \tan \delta_0 \operatorname{sen} 1'' + \xi\,\eta^2 \sec \delta_0 \tan^2 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' - \\ &\quad -\tfrac{1}{3}\,\xi^3 \sec^3 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' \\ \delta - \delta_0 &= \eta - \tfrac{1}{2}\,\xi^2 \tan \delta_0 \operatorname{sen} 1'' - \tfrac{1}{2}\,\xi^2\,\eta \sec^2 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' - \tfrac{1}{3}\,\eta^3 \operatorname{sen}^2 1'' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

en las que ξ, η, $(\alpha - \alpha_0)$, $(\delta - \delta_0)$ ..... están expresadas en segundos de arco.

Luego, si se las quiere tener en partes de red, las escribiríamos así:

$$\alpha - \alpha_0 = \xi \sec \delta + 300\,\xi\,\eta \sec \delta_0 \tan \delta_0 \operatorname{sen} 1'' + 300^2\,\xi\,\eta^2 \sec \delta_0 \tan^2 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' -$$

$$- \frac{300^2}{3}\,\xi^3 \sec^3 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' \qquad (4\ \text{bis})$$

$$\delta - \delta_0 = \eta - \tfrac{1}{2}\,300\,\xi^2 \tan \delta_0 \operatorname{sen} 1'' - \tfrac{1}{2}\,300^2\,\xi^2\,\eta \sec^2 \delta_0 \operatorname{sen}^2 1'' - \tfrac{1}{3}\,300^2\,\eta^3 \operatorname{sen}^2 1''$$

Calculados los coeficientes de estas series para -17° resulta:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_0 &= \xi \sec \delta - 4650 \times 10^{-7}\,\xi\,\eta + 21 \times 10^{-8}\,\xi\,\eta^2\ 81 \times 10^{-8}\,\xi^3 \\ \delta - \delta_0 &= \eta + 2223 \times 10^{-7}\,\xi^2 - 116 \times 10^{-8}\,\xi^2\,\eta - 71 \times 10^{-8}\,\eta^3 \end{aligned}\right\} (5)$$

Estas últimas fórmulas son las que en definitiva sirven para calcular las coordenadas esféricas de las estrellas, cuando se conocen sus coordenadas rectilíneas corregidas.

Para la zona encomendada al Observatorio de Santiago, basta limitar estas series a los términos de tercer grado, que son mui pequeños.

Ellas permiten calcular las posiciones de las estrellas, en la esfera celeste, con un grado de aproximación notable, como lo demostraremos más adelante.

Estas series nos ofrecen también la ventaja de que todos sus términos *pueden ser tabulados* o *pueden ser calculados por medio de ábacos*, quedando el cálculo reducido, en tales casos, a una simple suma algebráica de los valores tabulados o de los valores obtenidos por medio de los ábacos.

La construcción de esas tablas y de esos ábacos no ofrece ninguna dificultad.

Sobre esto creo innecesario explayarme más, especialmente aquí, en el seno de este Instituto, cuyos ilustrados miembros conocen perfectamente todos los procedimientos del cálculo gráfico.

En todo caso, la excelente obra del ingeniero francés M. D'Ocagne, intitulada *Calcul Graphique et Nomographie*, puede sacar de apuros al menos versado en la construcción de ábacos.

Las fórmulas del grupo (2) pueden también ser calculadas por medio de los ábacos de *curvas acotadas* o por medio de los llamados de *puntos alineados*.

La elección de unos u otros queda a voluntad de los calculadores.

APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS A LA PLACA N.° 5 DE LA ZONA —17.°

Los cuadros A y B, que se agregan al final de este trabajo, contienen todas las coordenadas rectilíneas medidas de las estrellas de la placa núm. 5, tanto en segundos de arco como en cuadros y fracciones de los cuadros de la red.

Además, el cuadro A contiene las coordenadas ecuatoriales de las estrellas de referencia para el equinocio de 1900, tomadas del *Catálogo de Washington*, y en el cuadro B se registran las coordenadas rectilíneas corregidas de todas las estrellas de la placa, según los valores obtenidos por las fórmulas del grupo (2).

En consecuencia, esos cuadros contienen todos los elementos necesarios para el cálculo de las coordenadas esféricas de las estrellas de la placa núm. 5, cuyo centro, referido al equinoccio de 1900, corresponde a 0 h 36 m de ascensión recta y 17° de declinación austral.

Nuestras estrellas de referencia han sido tomadas de las zonas del *Catálogo de Washington*, por la muy sencilla razón de haber sido ya utilizadas esas mismas estrellas por otros observatorios que se ocupan en la confección del *Catálogo Fotográfico del Cielo*, y entre los cuales justo es mencionar al observatorio mexicano de Tacubaya, que es el observatorio americano que tiene más adelantado su trabajo.

El error de una observación de las estrellas del *Catálogo de Washington*, en las zonas de -14° a -18°, es:

$$\pm 0^s,075 \quad y \quad \pm 0'',80$$

y, como el número medio de observaciones de cada estrella es de 2 1/4, resulta que el error medio de una posición del catálogo es:

$$\pm\frac{0^s,075}{\sqrt{2,25}} = \pm 0^s,050 \quad y \quad \pm\frac{0'',80}{\sqrt{2,25}} = \pm 0'',53$$

o en partes de red, teniendo presente que $\pm 0^s,050 = \pm 0'',75$, resulta:

$$\pm\frac{0'',75}{300''} = \pm 0,0025 \quad y \quad \pm\frac{0'',53}{300''} = \pm 0,0018$$

Así, pues, las posiciones de nuestras estrellas de referencia ofrecen toda clase de garantías para el cálculo de las constantes de nuestras placas fográficas.

Dicho esto, entremos de lleno al cálculo de la placa núm. 5, en la zona -17°, con el auxilio de las fórmulas que ya conocemos.

Placa n.° 5

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS RECTILÍNEAS IDEALES DE LAS ESTRELLAS DE REFERENCIA

Se han elegido como estrellas de referencia las cuatro estrellas que se registran en los cuadro A y B, bajo los números 6, 70, 105 y 136, porque, según nuestro criterio, ellas ocupan en la placa fotográfica una posición que satisface lo mejor posible a la del esquema de la figura 2.

Fórmulas

Posición del centro de la placa $\begin{cases} a_o = 0^h\ 36^m = 9^\circ \\ \delta_o = -17^\circ \end{cases}$

$$(1)\begin{cases} \xi = \dfrac{\cos\delta\ \operatorname{sen}(a-a_o)}{\operatorname{sen}\delta\ \operatorname{sen}\delta_o + \cos\delta\ \cos\delta_o\ \cos(a-a_o)} \\[2ex] \eta = \dfrac{\operatorname{sen}\delta\ \cos\delta_o - \operatorname{sen}\delta_o\ \cos\delta\ \cos(a-a_o)}{\operatorname{sen}\delta\ \operatorname{sen}\delta_o + \cos\delta\ \cos\delta_o\ \cos(a-a_o)} \end{cases}$$

	✳ 6	✳ 70	✳ 105	✳ 136
: −	8° 58' 42,"60	8° 12' 50,"10	9° 41' 58,"80	8° 48' 27,"45
	— 17 50 49, 30	— 17 13 16, 00	— 16 51 36, 40	— 16 17 33, 70
o = −	— 1 17, 40	− 47 9, 90	+ 41 58, 80	− 11 32, 55
$\cos \delta$ −	9,9785814	9,9800804	9 9809191	9 9821991
$\operatorname{sen} (\alpha - \alpha_0)$ =	6,5743072 n	8,1373324 n	8,0867585	7.5260251 n
log A =	6,5528886 n	8,1174128 n	8,0676776	7,5082245 n
$\operatorname{sen} \delta$ =	9 4863974 n	9,4713797 n	9,4624519 n	9,4480015 n
$\operatorname{sen} \delta_0$ =	9,4659353 n	9,4659353 n	9,4659353 n	9,4659353 n
log B =	8,95 :3327	8,9373150	8,9283872	8,9139368
B =	0,0896051	0,0865596	0,0847983	0,0822123
$\cos \delta$ −	9,9785814	9.9800801	9 9809191	9 9821994
$\cos \delta_0$ −	9,9805963	9,9805963	9 9805963	9,9805963
$\cos (\alpha - \alpha_0)$ =	0,0000000	9 9999591	9 9999676	0,0000000
log C −	9,9591777	9.9606358	9 9614830	9,9627957
C −	0,9102857	0,9133471	0,9151305	0,9179005
B + C −	0,9998908	0 9999067	0,9999288	1,0001128
log (B + C) −	9,9999523	9,9999594	9 9999690	0,0000478
og $\frac{A}{(B+C)}$	6,5529363 n	8,1174534 n	8,0677086	7,5081767 n
og $\frac{5}{3438}$ =	7,1626641	7,1626641	7,1626641	7,1626611
log ξ =	9,3902722 n	0,9547893 n	0,9050445	. 0,3455126 n
ξ	− 0,245624	— 9,01134	+ 8,036085	— 2,215708

	✱ 6	✱ 70	✱ 105	✱ 136
sen δ =	9,4863974 n	9,4713797 n	9,4624519 n	9,4480015 n
cos δ_0	9,9805963	9,9805963	9,9805963	9,9805963
log D =	9,4669937 n	9,4519760 n	9,4430482 n	9,4285978 n
D =	− 0,2930851	− 0,2831236	− 0,2773628	− 0,2682858
sen δ_0 =	9,4659353 n	9,4659353 n	9,4659353 n	9,4659353 n
cos δ =	9,9785814	9,9800804	9,9809191	9,9821994
cos (α − α_0) =	0,0000000	9,9999591	9,9999676	0,0000000
log E =	9,441516 n	9,4459748 n	9,4468220 n	9,4481347 n
E =	0,2783024	− 0,2792382	− 0,2797835	− 0,2806304
D − E =	0,0147827	− 0,0038854	+ 0,0024207	+ 0,0123446
sen δ =	9,4863974 n	9,4713797 n	9,4624519 n	9,4480015 n
sen δ_0	9,4659353 n	9,4659353 n	9,4659353 n	9,4659353 n
log F	8,9523327	8,9373150	8,9283872	8,9139368
F =	0,0896051	0,0865596	0,0847983	0,0820232
cos δ =	9,9785814	9,9800804	9,9809191	9,9821994
cos δ_0 =	9,9805963	9,9805963	9,9805963	9,9805963
cos (α − α_0) =	0,0000000	9,9999591	9,9999676	0,0000000
log G =	9,9591777	9,9606358	9,9614830	9,9627957
G =	0,9102858	0,9133470	0,9151305	0,9179007
F + G =	0,9998909	0,9999066	0,9999288	0,9999239
log (D − E)	8,1697538 n	7,5894357 n	7,3839410	8,0914770
log (F + G)	9,9999525	9,9999594	9,9999690	9,9999669
log $\frac{D-E}{F+G}$	8,1698013 n	7,5894763 n	7,3839720	8,0915101
log $\frac{5}{3438}$ =	7,1626641	7,1626641	7,1626641	7,1626641
log η =	1,0071372 n	0,4268122 n	0,2213079	0,9288460
η =	− 10,16570	− 2,671853	+ 1,664593	+ 8,488797

(Continuará).