HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

POR

CÁRLOS WARGNY

Resolvió la duplicacion del cubo, determinando dos medias proporcionales entre las rectas dadas OA, OB, para lo cual construyó el rectángulo OD i fijó el medio C de su diagonal; con centro en C i un radio conveniente cortó en a i b los lados del rectángulo i trazó la recta $a\ D\ b$; por último, proyectó C en P. Segun esta construccion se encuentra:

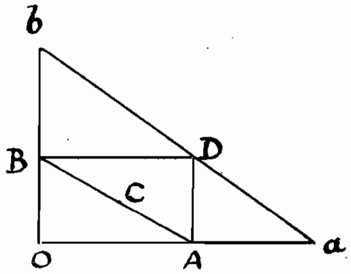

Fig. 4.

$\triangle$. C A a,

$$\overline{Ca}^{\,2} = Aa^{\,2} + \overline{CA}^{\,2}\,P + 2\cdot\text{ɐ}\ \ A\ \forall$$

$$= \overline{CA}^2 + Aa\,(Aa + 2\,AP)$$

$$= \overline{CA}^2 + Aa.\,Oa.$$

Del mismo modo:

$$Cb^2 = \overline{CB}^2 + Ob.\,Bb.$$

Como $Ca = Cb$ i $CA = CB$, tendremos:

$$Aa.\,Oa = Ob.\,Bb$$

$$\therefore \frac{Oa}{Ob} = \frac{Bb}{Aa}$$

Pero, los triángulos semejantes O a b, B D b, A D a nos dan:

$$\frac{BD}{Bb} = \frac{Oa}{Ob} = \frac{Aa}{AD};$$

en consecuencia,

$$\frac{O}{B\ \ b} = \frac{Bb}{Aa} = \frac{Aa}{OB};$$

i aquí Bb i Aa son los dos medias proporcionales entre OA i OB.

Como el trazado del círculo de centro C i radio $Ca = Cb$ no se puede hacer por la jeometría euclidiana, Apolonio dió un medio mecánico para trazarlo, construccion que citan varios autores árabes.

Chasles, en su *Reseña histórica de la Jeometría*, hace notar que los dos jeómetras mas eminentes de la antigüedad fundaron los cimientos de las dos grandes ramas de las Matemáticas Puras modernas: Arquímedes formuló los principios de la jeometría de la medida dando así nacimiento al Cálculo Infinitesimal; Apolonio, con sus estudios de las cónicas por medio de las trasversales, estableció los principios de la Jeometría de la forma i de la posicion.

Eratóstenes.—(—275 a —194) nació en Cirena, estudió en Alejandría, donde tal vez fué condiscípulo de Arquímedes, i en Atenas. Mui jóven aun, se le confió la direccion de la biblioteca de Alejandría. Notable por su fuerza atlética i sus conocimientos universales, poseia las mas atrayentes cualidades de un hombre de sociedad i era ademas un poco dado al cultivo de la poesia. Habiendo perdido la vista, no pudo conformarse con la privacion de la lectura i se dió la muerte.

Era versado principalmente en la Astronomía i la Jeodesia; construyó diversos aparatos astronómicos que sirvieron en la Universidad durante varios siglos; imajinó el calendario Juliano; asignó a la eclíptica una oblicuidad de 23° 51' 20"; determinó la lonjitud de un grado terrestre, que encontró igual a 127135 metros en vez de 111 km.; asignó a la circunferencia de la tierra un largo de 252000 estadios i al radio, 7400 km. en vez de 6400 km.

Sus obras existen sólo en fragmentos; se conservan la descripcion de un instrumento que servia para duplicar el cubo i la regla para formar una tabla de los números primos llamada *criba de Eratóstenes.* Consiste en escribir la serie natural de los números i en tarjar en seguida los múltiplos de los números primos 2, 3, 5, 7 . . ., para lo cual basta contar los números escritos de 2 en 2, de 3 en 3, etc. Procediendo de este modo hasta un millon, se emplearian mas de 300 horas. Para abreviar la operacion de determinar si un número n es primo o compuesto de factores, se divide a

por todos los divisoresprimos menores que $\sqrt{n}$

II SIGLO ANTES DE J. C.

El tercer siglo ántes de J. C. fué el período mas brillante de la ciencia griega. Se abre con Euclides i termina con Apolonio; i se caracteriza por el estudio de la Jeometría. Los discípulos i alumnos no hicieron mas que agregar pequeños detalles a la grandiosa obra de Euclides, Arquímedes i Apolonio. Trascurrieron 1800 años para que apareciera el jenio de Descartes, quien, descubriendo un nuevo método, dió a la Jeometría de los antiguos una estension considerable.

Despues de Apolonio sobresalen en la Historia de las Matemáticas, en un período de mil años, cuatro grandes figuras: Pappo, jeómetra de esclarecido talento; Hiparco i Tolomeo, fundadores de la Trigonometría, i Diofanto, creador del Aljebra.

Hipsiclés (—180?) agregó a los *Elementos* de Euclides el libro XVI en que se estudian los sólidos regulares. En otra de sus obras, *Las ascensiones*, se ve por primera vez un ángulo recto dividido en 90°, como lo hacian los babilonios.

Nicomedes (—180?) inventó la *concoide*, curva que resuelve la triseccion del ángulo o la duplicacion del cubo. Se construye del modo que se indica: Si de un punto fijo S se traza una recta que corta en Q a otra recta fija, i si se toma sobre SQ, a partir de Q, una lonjitud constante $QP=d$, el lugar jeométrico de P, al variar la posicion de Q, es una concoide. En coordenadas cartesianas su ecuacion es de cuarto grado:

$$x^2 y^2 = (p+y)^2 \quad (d^2 - y^2);$$

p es la distancia de S a la recta fija; i en coordenados polares:

$$r = p \sec \theta + d$$

Diocles (—180?) es el inventor de la *cisoide* o en forma de hoja de yedra, curva que resuelve la duplicacion del cubo.

Sean $A\,0\,A'$, $B\,0\,B'$ dos diámetros perpendiculares i fijos; tracemos dos cuerdas $Q\,Q'$, $R\,R'$ paralelas a $B\,0\,B'$ i equidistantes de este diámetro; el lugar de la interseccion de $A\,R$ i $Q\,Q'$ es la cisoide. En coordenadas rectangulares su ecuacion es de tercer grado:

$$y^2\,(2\,a-x)=x^3\;;$$

i en coordenadas polares,

$$r=2\,a\,\mathrm{tg}\,\theta\,\sec\,\theta;$$

a es el radio del círculo.

Diocles, empleando las cónicas, resolvió ademas el siguiente problema propuesto por Arquímedes: Dividir una esfera, por medio de un plano, en dos segmentos que guarden entre sí una razon dada.

Perseo (150?) estudió las diversas secciones planas de un toro o anillo.

Zenodoro (150?) escribió un tratado sobre las figuras isoperimétricas, del cual se conserva una parte. Como ejemplo de las proposiciones que sienta, damos la siguiente: De todos los segmentos circulares comprendidos en arco sigua-les, el mayor es el semi-círculo.

Hiparco (—160?) Es el mas eminente de los astrónomos griegos. Nació en Nicea, Bitinia, i tuvo por predecesores a Eudosio, Aristarco, Arquímedes i Eratóstenes. Es de presumir que pasara algunos años en Alejandría, pero se estableció definitivamente en Rodas, donde hizo la mayor parte de sus observaciones.

Hiparco determinó que la estrella η del *Perro* tenia una lonjitud de 90°. Para precisar la fecha en que pudo haber sido hecha esta observacion, el astrónomo Delambre encontró que, como el punto vernal retrograda 50'', 2 por año i como en 1750 la lonjitud de dicha estrella era de 116° 4' 10'', el valor de 90° correspondia a 120 A. J. C.

Todas las obras de Hiparco se han perdido, excepto un pequeño comentario del poema de Arato, en que habla de Astronomía. Empero, el gran tratado de Tolomeo, el *Almajesto,* reposa sobre las observaciones i escritos de Hiparco, a quien podemos restituirle sus principales descubrimientos: Determinó la verdadera duracion del año con una aproximacion de 6 minutos; calculó la inclinacion de la eclíptica con 23° 51' en vez de 23° 46'; estimó la precesion anual de los equinoxios en 59", en lugar de 50," 2; con bastante exactitud asignó a la paralaje horizontal de la luna 57'; encontró que la excentricidad de la órbita solar era de $\frac{1}{24}$ en lugar de $\frac{1}{30}$; fijó el perijeo i el movimiento medio del sol i de la luna; i calculó la inclinacion del plano de la órbita lunar sobre el de la eclíptica. Suponia que la luna se desplazaba con movimiento uniforme sobre un círculo cuyo centro era aproximadamente el de la tierra: creia, pues, que la órbita lunar era un epiciclo de primer órden. La lonjitud de la luna que obtuvo, fundado en esta hipótesis, es casi correcta para algunas revoluciones. De igual manera esplicaba el movimiento del sol.

Habia comenzado una serie de observaciones planetarias para que sus sucesores pudieran dar una esplicacion completa de sus movimientos; i con rara sagacidad previó que no seria posible una esplicacion satisfactoria de estos fenómenos, a ménos que no se introdujeran epiciclos de un órden superior, esto es, imajinando tres o mas círculos que se desplazarán con movimiento uniforme sobre la circunferencia del círculo anterior.

Compuso un catálogo de 1080 estrellas fijas, trabajo que emprendió con motivo de la aparicion súbita de una estrella notable por su claridad. Despues de Hiparco la ciencia astronómica quedó estacionaria, hasta la publicacion de los trabajos de Copérnico. Sin embargo, no hai que olvidar a Tolomeo, que se posesionó de todos los conocimientos de Hiparco, los estudió de nuevo i les dió un gran desarrollo.

Hiparco es considerado como el creador de la *Trigonometría.* Construyó una tabla de cuerdas que puede ser comparada con una de senos naturales; poseia un método particular para resolver los triángulos esféricos, que no ha llegado a nosotros.

Créese que la proposicion *D* del libro VI de Eudides, conocida bajo el nombre de Teorema de Tolomeo, es debida a Hiparco. Su enunciado es: el rectángulo de las diagonales de un cuadrilátero inscrito, es igual a la suma de los rectángulos de los lados opuestos. Contiene implícitamente el desarrollo de

$$\text{sen}\,(a \pm b) \text{ i } \cos\,(a \pm b).$$

Finalmente, Hiparco fué el primero que fijó la posicion de un lugar jeográfico por medio de las coordenadas ecuatoriales, la lonjitud i la latitud.

Heron (100 a ?) de Alejandria fué discípulo de Ctesibo i estableció sobre bases científicas el arte del injeniero i del agrimensor. Las obras características de Heron son las que se indican.

1.º Una Jeometría elemental con aplicaciones a la Agrimensura.

2.º Determinacion del volúmen de ciertos sólidos con aplicaciones a los edificios, teatros, baños, salas de recreo, etc.

3.º Un procedimiento para medir la altura de un objeto inaccesible.

4.º Una tabla de pesos i medidas.

Resolvió la duplicacion del cubo por el método de Apolonio; se presume que sabia resolver las ecuaciones literales de 2.º grado; estableció la fórmula del área del triángulo en funcion de los tres lados:

$$A=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

en la que

$$p=\frac{1}{2}\,(a+b+c);$$

i la aplicó al triángulo

$$a=13,\ b=14,\ c=15.$$

Esta fórmula la estableció como sigue:

Sean Δ el área del triángulo $A\ B\ C$, r el radio del círculo inscrito, p el semi-perímetro.

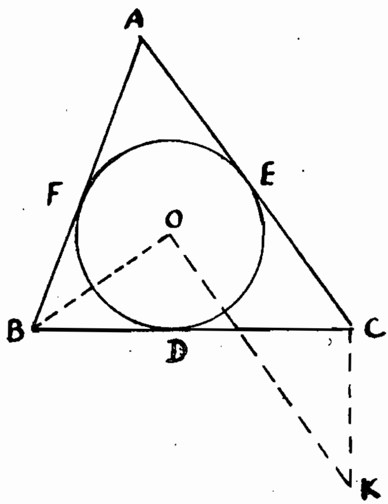

Fig. 5.

Tendremos primeramente:

$$\Delta = OAB + OAC + OBC$$

$$= \frac{1}{2} r\,(a+b+c) = p\,r \qquad (1)$$

Ademas,

$$2\,AF + 2\,BD + 2\,CO = 2\,p$$

o

$$AF + BD + CD = AF + BC = p.$$

Tomemos en B C prolongado.

$$CH = AF \;\therefore\; BC = p \qquad (2)$$

i segun (1),

$$\Delta = BH.\ OD.$$

Tracemos $OK \perp OB,\ CK \perp BH$:

$\Delta.\ OAF \sim CBBK$, porque B, O, C, K

son concídicos, pues siendo

$BOK = 90^\circ,\ < OBC = OKC = \frac{1}{2} B \;\therefore\; OKC = \frac{1}{2} C$ i $KBC = \frac{1}{2} A.$

En segundo lugar, tendremos:

$$\frac{BC}{CK}=\frac{AF}{OF}=\frac{CH}{OD},$$

$$\frac{BC}{CH}=\frac{CK}{OD}=\frac{C}{LD},$$

$$\frac{BH}{CH}=\frac{CD}{LD};$$

$$\therefore \frac{\overline{BH}^2}{CH.BH} \therefore = \frac{CO.BD}{LD.BD}=\frac{CD.BD}{OD^2};$$

i, en consecuencia

$$\triangle = BH.OD = \sqrt{CH.BH.CD.BD}$$

$$=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Heron estudió el centro de gravedad, las cinco máquinas simples i el desplazamiento de una masa solicitada por una fuerza; indicó la manera de triplicar la potencia de una catapulta; escribió sobre las máquinas hidráulicas; describió un teodolito (dioptra ?) i un cidómetro i señaló su aplicacion a la agrimensura.

De todas sus obras, la *Neumática* i la *Automática* son las mas interesantes i en ellas describe cerca de cien juguetes mecánicos, que revelan su injenio; i una máquina de vapor igual al aparato de Avery que, como es sabido, no tenía las ventajas del que imajinara Watt; por último, da algunos detalles de una bomba de doble efecto para incendios.

Heron no miraba mas que la parte práctica de las Ciencias exactas i su inmediata utilidad; poco se inquietaba de la demostracion de un teorema o de la lójica matemática; i la objecion que se le hacia de obtener el área de un triángulo estrayendo la raiz cuadrada del producto de cuatro rectas, como sucede en su fórmula, estaba fundada en que los jeómetras griegos rechazaron siempre los lugares de cuarto órden, por la razon de que no sabian como imajinarlos jeométricamente.

El jenio de Heron, tan diferente del de los matemáticos griegos, ha hecho suponer que era de oríjen ejipcio, i que conoció el tratado de Ahmes, analizado mas arriba, i el de Akhmin, que data de unos 800 años ántes de J. C.

I siglo ántes de J. C.

Teodoro (-50?) escribió un tratado completo sobre la Jeometría de la Esfera, que fué editado en 1675 por I. Barrow i en 1852 por Nizze. Compuso, ademas, dos obras de Astronomía.

Dionisidoro (−50?) resolvió el problema de dividir un hemisferio, por medio de un plano paralelo a la base, en dos volúmenes que guardan una razon dada; lo que hizo valiéndose de las secciones cónicas. Plinio cuenta que determinó el radio terrestre dándole 80,000 km. de lonjitud.

————

30 años A. J. C. Roma conquistó definitivamente el Ejipto i los últimos años del reinado de los Tolomeos fueron turbados por discordias civiles i revueltas militares que paralizaron la accion civilizadora de la Universidad. Esta época señala el fin de la Primera Escuela de Alejandría.

CAPÍTULO V

SEGUNDA ESCUELA DE ALEJANDRIA

(–30 a 641)

Hemos visto que la primera Escuela de Alejandria desapareció desde el momento en que la nacion perdió su independencia: al réjimen imperial sucedió el republicano, i las universidades se resintieron de esta trasformacion.

Despues de restablecido el órden, acudieron los estudiantes a las aulas; pero ya la ciencia habia tomado otro rumbo. Inspirados los nuevos jeómetras en las ideas de Platon i Pitágoras, el misticismo de sus doctrinas invadió el campo de las Matemáticas, i la obra científica de esta época fué estéril.

Siglo I despues de J. C.

Sereno de Antinae (70?) escribió sobre las secciones planas cónicas i las cilíndricas, obra que publicaron Halley en 1710 i Heiberg en 1896.

Menelao de Alejandria (98?) compuso una Trigonometría Esférica, segun las doctrinas de Euclides, i que tradujo Halley en 1758. El teorema fundamental reposa en la relacion que existe entre los seis segmentos de los lados de un triángulo determinados por el arco de círculo máximo que los corta (Libro III, prop. I). Compuso tambien una Trigonometría plana que ha desaparecido.

Nicómaco (50—100?), judio nacido en Gerusa, escribió una Aritmética (editada en 1866 por R. Hache), que fué libro clásico en las escuelas cerca de mil años.

Es una simple clasificacion de los resultados conocidos en aquel entónces, con ejemplos numéricos pero sin demostraciones jeométricas. La exactitud de las propiedades que enuncia están verificadas con simples aplicaciones a los números; i la obra tiene por objeto principal el estudio de las propiedades de los números i las razones. Comienza por clasificar los números en pares, impares, primos i perfectos; sigue con las fracciones, materia que dá a conocer con poca correccion; despues trata de los números poligonales i sólidos; i termina con las razones, proporciones i progresiones.

Una aritmética de este jénero lleva el nombre de *Boeciana*, i el *tratado* de Boecio fué autoridad en la Edad Media.

II siglo despues de J. C.

Teon de Esmirna (130?) compuso otro tratado de Aritmética parecido al de Nicómaco. Formaba este trabajo la primera parte de un tratado de Matemáticas destinado a facilitar el estudio de los escritos de Platon.

Timaridas es el autor mas antiguo que haya enunciado un teorema de Áljebra.

Sostiene que si

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = S,$$

i si, ademas,

$$x_1 + x_2 = s_2,\ x_1 + x_3, = s_3,\ \dots\ x_1 + x_n = s_n,$$

entónces se tendrá:

$$x_1 = \frac{s_2 + s_3 + \dots + sn - S.}{n - 2}$$

Parece que no empleó ningun signo para representar la incógnita; mas, hai que advertir que siempre usa la misma palabra para designarla.

Tolomeo (Claudio) de Alejandría (? a 168) publicó por los años 125 a 150 D. J. C. su gran trabajo sobre la Astronomía, que trasmitirá su nombre a las jeneraciones futuras. Conócese este trabajo con el título de *Almajesto*, en árabe *al midschisti*, corrupcion de la voz griega *megiste*; pues, en este idioma está titulado *Megále Syntaxis* o *Gran Construccion.*

Su contenido no es mas que la reproduccion de los estudios de Hiparco. Empero, sus ideas están espuestas con tal elegancia i perfeccion, que la obra es considerada como un modelo en su jénero. En las observaciones que hiciera el autor, ántes de salir a luz su trabajo, se revela astrónomo mediocre i, por lo tanto, mui inferior a Hiparco.

La obra comprende 13 libros. En el I discute diversas nociones preliminares, trata de la trigonometría plana i esférica, da una tabla de cuerdas o senos, esplica la oblicuidad de la eclíptica i estima los ángulos en grados, minutos i segundos. El II está consagrado a los fenómenos que resultan de la forma esférica de la tierra; hace notar que las esplicaciones serian mas sencillas si se admitiera la rotacion diurna de nuestro planeta, pero esta suposicion la rechaza por encontrarla en pugna con la observacion. En el III esplica el movimiento del sol alrededor de la tierra por medio de círculos escéntricos i epiciclos; i en los IV i V asigna a nuestro satélite igual movimiento. En el VI da a conocer la teoría de los eclipses; i aquí señala que aproximadamente es

$$\pi = 3^{o}\,8'3'' = 3\frac{17}{120} = 3{,}1466\ldots.$$

Los VII i VIII contienen un catálogo de 1028 estrellas fijas, especificando las situadas sobre un mismo círculo máximo. Los últimos libros están destinados a la teoría de los planetas.

Esta obra, que atestigua de un modo admirable la intelijencia del autor, fué inmediatamente adoptada como libro clásico i predominó en la Ciencia de la Astronomía, hasta que Copérnico i Képler demostraron que el sol era el centro del sistema del mundo.

No obstante el ridículo en que han caido los excéntricos i epicidos que imajinaran Hiparco i Tolomeo para esplicar el movimiento de los planetas, hai que confesar que, dados los conocimientos de aquellos tiempos, tales teorías no solo eran lejítimas sino aun facilitaban las esplicaciones. De los estudios que se han hecho sobre la orijinalidad del *Almagesto*, Delambre i De Morgan han concluido que los principios fundamentales i las observaciones pertenecen a Hiparco; i los detalles i cálculos son de Tolomeo.

A la vez que astrónomo, el autor del Almagesto era un gran jeómetra. Entre los numerosos tratados que compuso, merece especial mencion la *Jeometría pura*, en la que se propone suprimir el axioma XII de Euclides sobre las paralelas, i reemplazarlo por el siguiente teorema:

Dos rectas cortadas por una tranversal, i que forman ángulos interiores suplementarios, son paralelas.

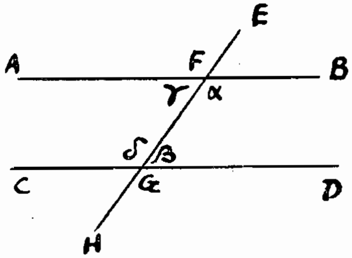

Fig. 6.

Hipótesis. $\gamma+\beta=180^{o}$.

Tesis: A B $\parallel$ C D.

Demostracion. Si no fueran paralelas, se cortarían en M o N; pero

$$\gamma = 180^\circ - \alpha.$$

$$\delta = 180^\circ - \beta;$$

luego, $$\gamma + \delta = 180^\circ.$$

i las rectas se cortarian en N o M. Pero dos rectas no pueden encerrar espacio; luego no puede admitirse que las rectas prolongadas se encuentren; i, en consecuencia, son paralelas.

Recíprocamente, si las rectas son paralelas, sus segmentes A F, C G tambien serán paralelos, lo mismo que F B i G D; por lo tanto, cualquiera que sea la suma de γ i δ, la de α i β será la misma; como la suma de estos cuatro ángulos vale cuatro rectos, luego la de α i β valdrá dos rectos.

Tolomeo escribió un libro en que demuestra que el espacio no puede tener mas de trés dimensiones; estudió las proyecciones ortográfica i estereográfica con aplicaciones especiales a la construccion de los cuadrantes solares. Escribió igualmente sobre jeografía i estableció que el grado de latitud valia 500 estadíos. Atribúyesele, ademas, una obra de *óptica* i otra de *acústica.*

Siglo III, D. J. C.

Pappo (280?) vivia i enseñaba en Alejandría; compuso varias obras i solo las *Synagogue* o *Colecciones Matemáticas*, publicadas por Hutsch en 1876, han llegado a nuestro poder. Se compone de 8 libros, de los cuales el I i una parte del II están perdidos.

Propúsose en este trabajo analizar las obras de los matemáticos griegos, con comentarios i nuevas proposiciones. Si se compara la fidelidad de los detalles que da sobre los libros de los antiguos que se conservan, podemos dar entero crédito de lo que dice respecto de las obras que ya no existen. No dispone en órden cronolójico las obras que comenta, sino que las clasifica conforme con la materia de que tratan.

Presúmese que el libro I versaba sobre la Aritmética; los libros II al V estudian la jeometría euclidiana; el VI, la astronomía, la óptica i la trigonometría; el VII, el análisis, las cónicas i los prismas; i el VIII, la mecánica.

Los dos últimos libros contienen muchas proposiciones del autor; mas, se ha podido comprobar que varias de ellas son de autores mas antiguos. A pesar de todo, la parte mejor de la Coleccion de Pappo es la Jeometría. Da a conocer sumariamente la directriz de las cónicas; su estudio completo pertenece a Newton i Boscovich.

Como ejemplo de su sagacidad, damos el siguiente problema que resolvió: Inscribir en un círculo un triángulo cuyos lados pasen por tres puntos colineales. Cramer propuso este problema en 1742, dándoles a los puntos cualquiera posicion. En 1776, el jeómetra italiano Castillon dió una solucion, i en 1780 lo resolvieron, a su vez, Lagrange, Euler, Lhuillier, Fuss i Lexell. Giordano, a los 16 años de edad, dió una de las soluciones mas elegantes (V. frère G. M., *Exerc. de Geom.* p. 683); i es tendió el problema a un polígono de n lados que pasa por n puntos. Poncelet lo jeneralizó aun mas, aplicándolo a las cónicas.

En su mecánica, Pappo demostró que el centro de gravedad de un triángulo homojéneo es el mismo que el de un triángulo inscrito, cuyos vértices dividen a los lados del primero en la misma razon. Descubrió, ademas, las dos proposiciones siguientes, conocidas hoi con el nombre de *Teoremas de Guldin*:

I. El área de una superficie de revolucion es igual al producto de la jeneratriz por la circunferencia descrita por el centro de gravedad de dicha jeneratriz.

II. El volúmen de un cuerpo de revolucion es igual al producto de su seccion por la circunferencia desciita por el centro de gravedad de dicha seccion.

Estos dos teoremas son ejemplos de las importantes cuestiones que Pappo no hace mas que enunciar en sus Colecciones; i tanto el conjunto de esta obra como sus comentarios, revelan que era un jeómetra notable. Tambien se le quiere atribuir un pequeño tratado de la multiplicacion i de la division, editado por C. Henry en 1879.

Siglo IV, D. de J. C.

Durante los siglos II i III el interes por la Jeometría habia disminuido; i despues de la publicacion de la Aritmética de Nicómaco, la atencion de los matemáticos se dirijió al estudio de la teoría de los números, materia que Euclides habia tratado conjuntamente con la jeometría, representando aquéllos por líneas rectas. Arquímedes profundizó la cuestion de igual manera; Heron abandonó el gráfico de los números; pero no encontró una notacion numérica apropiada; Nicómaco i otros aritméticos para demostrar un teorema se contentaban con aplicarlos a diversos ejemplos numéricos; i el conocimiento mas elevado que poseian consistia en resolver las ecuaciones numéricas de 2.º grado.

Metrodoro publicó hácia el año 310 la *Antolojía Palatina*, coleccion de cuestiones matemáticas, de las cuales damos algunos ejemplos.

I. Cuatro tubos conducen agua a una cisterna: el 1.º la llena en un dia, el 2.º en dos, el 3.º en tres i el 4.º en cuatro. ¿Cuánto tiempo emplearán los cuatro tubos juntos en llenarla?

II. Demócares ha pasado la cuarta parte de su vida en la niñez, la quinta en la juventud, la tercera en la virilidad i vivió 13 años en la vejez. ¿A qué edad murió?

III. Una corona pesa 60 minas, i está compuesta: las dos terceras partes de oro i cobre, las tres cuartas de oro i estaño i las tres quintas de oro i hierro. Calcular el peso de cada metal.

Estos problemas, que se resuelven hoi por medio de ecuaciones sencillas se pueden resolver ademas por la jeometría o valiéndose de la *regla de falsa posicion*, que emplearon los árabes.

Así, por ejemplo, en el segundo problema anterior, supongamos que la edad de Demócares era de 40 años, llegamos al resultado de que vivió en la vejez 8 2/3 años, en vez de 13; en seguida establecemos la proporcion

$$\frac{8\ 2/3}{13} = \frac{40}{x}$$

$$x = \frac{40 \times 13}{\frac{26}{3}} = 60 \text{ años.}$$

Los críticos modernos creen que estos problemas se resolvian por el *Aljebra de retórica*, en la que los signos aljebraicos eran remplazados por frases equivalentes. Si se acepta esta suposicion, se puede sentar el hecho de que el Aljebra comenzó entre los griegos por ser fraseolójica i que despues pasó a ser simbólica. No obstante este primer paso dado en el camino de las Ciencias exactas, Hanker opina que esta manera de tratar las cuestiones, no condujo durante seis siglos a resultados de importancia.

El primero que creó en verdad una ciencia tal fué Diofanto, introduciendo en el raciocinio un sistema de abreviaciones para las operaciones i cantidades, pero respetando siempre la construccion gramatical. Nesselmann le da a esta nueva ciencia el nombre de *Aljebra sincopada*, i puede compararse a una especie de estenografía. El Aljebra *simbólica*, con lenguaje i notacion propios, no apareció en el mundo científico sino a fines del siglo XVI.

Diofanto.—Se cree que no era griego i que vivia en Alejandría en la primera mitad del siglo IV, es decir, poco despues de la muerte de Pappo. Sabemos, sí, por un problema de aquella época, que murió a los 84 años. S. P. Tannery públicó sus obras en 1893.

Sin embargo de haberse atribuido a Diofanto la creacion del álgebra sincopada, algunos críticos, como Cantor i Friedlein, han encontrado que Pappo i otros autores habian ya empleado diferentes signos aljebraicos, como los de adicion i sustraccion, representados por una raya inclinada i una coma grande.

Diofanto escribió un corto ensayo sobre los números poligonales, un tratado de Algebra que nos ha llegado trunco, i una obra sobre los Porismos, que está perdida.

El ensayo contiene 10 proposiciones i representa, separándose de Nicómaco, los números por líneas, a la manera de Euclides; cuando lo cree necesario, hace una construccion jeométriea, i la prueba es rigurosamente deductiva.

La Aritmética, su obra principal, es un verdadero tratado de Algebra; i en él emplea los signos de esta ciencia i trata los poblemas por el Análisis.

Supone que los raciocinios son reversibles i aplica los principios que establece a la resolucion de varios problemas numéricos. Representa la incógnita por la letra griega equivalente a nuestra *s*; la llama el *número* i el plural lo escribe ss o ss^{oi}. Se crée que esta notacion es una corrupcion de a^{o}, o que es la última letra de *soros*, monton, que era la palabra empleada por los matemáticos ejipcios para designar nuestra x. El cuadrado lo llama *dynamis*, potencia, i lo escribe a^{y}'; usa nuestra palabra *cubo* para la tercera potencia, que escribe x^{y}; i de igual manera procede hasta la sesta potencia. Los coeficientes i esponentes son siempre numéricos, i escribe los primeros despues de la incógnita: s'a equivale a x. 1, i $\overline{ss}$ $\overline{\ }$ia a x. 11.

Téngase presente, ademas que los griegos denotaban los números por las letras de su albafeto; así a=1, b=2, c=3, etc.

Un término absoluto es considerado como una reunion de unidades; lo llama *mónada*, i lo representa por m^{d}; ejemplos: m^{d} $\overline{\ }$a equivale a 1 i $m^{\overline{d}}$ $\overline{\ }$ia a 11.

Indica la adicion yustaponiendo los términos; para la sustraccion emplea la letra griega *psi* i la igualdad la designa por *i:*

$$h\tilde{y}\ \bar{a}\ s\ s\ p\ s\ d\tilde{y}\ e\ m\ d\bar{a}\ i\ s\bar{a}$$

se traduce en nuestra notacion moderna:

$$(x^3+8x)-(5x^2+1)=x$$

Todas estas notaciones no son mas que abreviaciones de lenguaje, i cuando hace una demostracion, intercala estos signos en el discurso. Llevan algunos textos de Diofanto, en el márjen, el resúmen del texto en símbolos; pero es de presumir que este trabajo es obra de los copistas. La manera anterior de reducir el lenguaje, por medio de abreviaciones o símbolos, es un gran progreso i el primer paso dado en el verdadero camino de la ciencia. No está de mas advertir que las abreviaciones eran mas empleadas en aquellos tiempos que hoi dia, i que la misma escritura ejipcia pudo haber sujerido la idea de reducir las ideas a unos cuantos signos.

El Aljebra es la ciencia del cálculo, o de las operaciones que se hacen con las cantidades para trasformarlas en cantidades simples, que podemos estimar *directamente;* i el que conoce las complicadas operaciones que hai que hacer para tal objeto, comprenderá la imposibilidad de esplicarlas con frases o palabras. Si los griegos hubieran poseido otro sistema de numeracion que el de su alfabeto, el simbolismo aljebraico habria hecho su aparicion con los primeros cálculos un poco complicados.

Los métodos aljebraicos de Diofanto pueden resumirse en los siguientes:

Indica el significado del signo *ménos* i constata la regla $(-).(-1)=+$ en el desarrollo de $(a-b)(c-d)$, en que el producto bd es positivo; pero siempre supone que $a>b$ i $c>d$.

La obra está consagrada a la resolucion de las ecuaciones. Da las reglas para resolver las ecuaciones sencillas lineales i las binomias cuadradas:

$$ax+b=o,\ ax^2+b=o.$$

Es probable que para resolver la forma

$$ax^2+bx+c=o,$$

multiplícase los dos miembros por a,

$$a^2x^2+abx+ac=o;$$

i, en seguida, *complétase el cuadrado,* agregando $\frac{1}{4}b^2$ a los dos miembros:

$$a^2x^2+abx+\frac{1}{4}b^2+ac=\frac{1}{4}b^2;$$

de lo cual sale,

$$\left(ax+\frac{1}{2}b\right)^2=\frac{1}{4}b^2-ac$$

de aquí:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Cuando las raices son negativas o irracionales, declara la ecuacion imposible; i cuando ámbas son positivas, toma sólo una de ellas, la que lleva el radical positivo.

En el libro VI, 19, resuelve la cúbica

$$x^3+x=4x^2+4.$$

La mayor parte de las ecuaciones que estudia, son indeterminadas con dos i tres incógnitas. Para resolver la forma

$$ax+by=c,$$

atribuye a y un valor conveniente m, i en seguida resuelve

$$x=\frac{c-bm}{a}.$$

Muchas ecuaciones tienen la forma

$$y^2=Ax^2+Bx+C.$$

Si A i C son nulos, resuelve completamente la ecuacion; pero si no es así, i si $A=a^2$, supone $y=ax+m$; si $C=c^2$, supone $y=mx+c$; i si $y^2=(ax\pm b)^2+c^2$, hace $y=mx$. En cada una de estas hipótesis, m es un coeficiente variable para cada problema. Cuando éste es de un grado superior, trata de reducirlo a uno de los problemas ya estudiados. Llama *ecuaciones dobles* a las indeterminadas con tres incógnitas:

$$y^2=Ax^2+Bx+C,\quad z^2=ax^2+bx+c.$$

Cuando A i a desaparecen simultáneamente, da una o dos soluciones. Por lo demas, procede así:

Resta las dos ecuaciones,

$$y^2-z^2=(A-a)\ x^2+(B-b)\ x+(C-c),$$

como $A=a$, se reduce a la forma

$$y^2-z^2=mx+n.$$

Hace ahora

$$y \pm z = \lambda,$$

i de aquí,

$$y \mp z = \frac{mx+n}{\lambda}.$$

No obstante estos procedimientos, empleados aun hoi dia, la manera de resolver las ecuaciones de un grado superior carece de jeneralidad.

Son tan variadas las cuestiones que trata, que es casi imposible hacer un resúmen conciso i sistemático de ellas. Los críticos de esta obra, quedan siempre sorprendidos del injenio del autor i de los innumerables artificios de cálculo que emplea para resolver las cuestiones mas diversas.

Damos en seguida algunas de ellas.

I. Encontrar cuatro números tales que las sumas de tres de ellos, tomados de todas las maneras posibles, sean iguales a 22, 24, 27 i 20. (Lib. I, 17).

Sea x la suma de los cuatro números, i tendremos que éstos son

$$x-22,\ x-24,\ x-27 \text{ i } x-20;$$

luego,

$$x=(x-22)+(x-24)(+x-27)+(x-20)$$

$$\therefore x=21$$

i los cuatro números: 9, 7, 4, 11

II. Dividir a 13, que es la suma de los cuadrados 2^2 i 3^2, en otros dos cuadrados (II, 10).

Como los cuadrados son 2^2 i 3^2, Diofanto supone que los cuadrados buscados son:

$$(x+2)^2 \text{ i } (mx-3)^2.$$

Hace $m=2$ i establece la ecuacion

$$(x+2)^2 + (2x-3)^2 = 13$$

o

$$5x^2 - 8x = 0$$

$$\therefore x = \frac{8}{5}.$$

Los cuadrados son:

$$\frac{324}{25} \text{ i } \frac{1}{25}.$$

III. Encontrar dos cuadrados tales que agregando a su producto uno de ellos, se obtengan dos nuevos cuadrados (II, 29).

Sean x^2, y^2 los cuadrados que se buscan; tendremos los nuevos cuadrados

$$x^2 y^2 + y^2, \; x^2 y^2 + x^2$$

o

$$y^2 (x^2 + 1), \; x^2 (y^2 + 1).$$

El primero será un cuadrado si $x^2 + 1$ tambien lo es. Supone éste igual a $(x-2)^2$, esto es:

$$x^2 + 1 = (x-2)^2$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}$$

Sustituye este valor,

$$\frac{9}{4}(y^2+1),$$

supone

$$9y^2 + 9 = (3y-4)^2$$

$$\therefore y = \frac{7}{24};$$

i los cuadrados buscados son

$$\frac{9}{16} \text{ i } \frac{59}{576}$$

Conviene hacer observar que Diofanto no tenia mas que un solo signo para designar la incógnita, i que resuelve este problema reduciéndolo a ecuaciones con una sola incógnita.

IV. Encontrar un triángulo rectángulo de lados racionales, cuya bisectriz de un ángulo agudo sea tambien racional (VI, 18).

Sea el triángulo A B C, rectángulo en A; tracemos la bisectriz B D de B; sea, ademas,

$$BD=5x,\ AD=3x\ \therefore\ AB=4x$$

Supongamos, ahora, que A C es un múltiplo de 3:

$$CD=3-3x,\ BC=4-4x;$$

luego,

$$(4-4x)^2=3^2+(4x)^2$$

$$\therefore\ x=\frac{7}{32}$$

Multiplicando por 32, se obtienen los lados 28, 26, 100 i la bisectriz 35.

V. Una persona compra x medidas de vino a 8 i 5 dracmas; el valor total en dracmas es un número cuadrado exacto i que sumado con 60 resulta x^2. Encontrar el número de medidas correspondiente a cada precio (V, 33).

Se pagó

$$x^2-60;\ \text{luego}$$

$$8x > x^2-60,\ 5x < x^2-60$$

$$11 < x < 12$$

Ademas x^2-60 es un cuadrado que suponemos igual a $(x-m)^2$:

$$x^2-60=(x-m)^2$$

$$\therefore x = \frac{m^2 + 60}{2m};$$

luego

$$11 < \frac{m^2 + 60}{2m} < 12,$$

o

$$19 < m < 21.$$

Diofanto hace $m = 20$ y obtiene $x = 11\frac{1}{2}$; I para el precio total, $x^2 - 60 = 72\frac{1}{4}$.

Sean ahora y, z las partes vendidas a diferentes precios.

$$\tfrac{1}{5}z + \frac{72\frac{1}{4} - z}{8} = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore z = \frac{5 \times 79}{12},\ y = \frac{8 \times 59}{12},$$

lo que nos dá $\frac{79}{21}$ medidas a 5 dracmas i $\frac{59}{12}$ a 8.

Diofanto compuso un libro sobre los *Porismos*, que no ha llegado a nosotros; pero conocemos algunos de sus enunciados, de los cuales damos los que siguen:

I. La diferencia de dos cubos siempre puede trasformarse en la suma de dos cubos.

$$x^3 - y^3 = u^3 + v^3$$

II. El número $4^n - 1$ no puede descomponerse en la suma de dos cuadrados.

III. El número $8^n - 1$ (o tal vez $24^n + 7$) no puede descomponerse en la suma de tres cuadrados.

IV. Todo número equivale a un cuadrado o a la suma de 2, 3 o 4 cuadrados.

Los escritos de Diofanto no tuvieron ninguna influencia en el adelanto de la ciencia de los griegos; pero, su Aritmética contribuyó al progreso de las Matemáticas en Europa despues de haber sido traducida al árabe. En 1575 fué vertida al latin por *Xilandro* i excitó jeneral interes. Mas, los aljebristas de aquella época ya habian sobrepasado los límites de los conocimientos de Diofanto.

Jámblico (350?), a quien debemos un notable trabajo sobre las doctrinas i descubrimientos de los pitagóricos, parece haber estudiado las propiedades de los números; pues, dió a conocer el teorema que dice: Si un número es la suma de tres números enteros 3n, 3n — 1, 3n — 2, la suma de sus cifras o la de las cifras de la primera suma es 6. Por ejemplo,

$$159 = 54 + 53 + 52$$

$$\therefore 1 + 5 + 9 = 15, \ 1 + 5 = 6.$$

Como la demostracion de este teorema presenta alguna dificultad, cuando se emplea la numeracion de entónces, creen algunos que los griegos conocian ya una notacion parecida a la de los árabes.

Teon de Alejandría vivió por el año 370. Editó los *Elementos* de Euclidès i comentó el *Almajesto* de Tolomeo, traducido i comentado a su vez por Halma, en 1821; contiene numerosas informaciones de los métodos aritméticos empleados por los griegos.

Hipatia, hija de Teon i de mas renombre que su padrees considerada como el último matemático célebre de la Escuela de Alejandría. Escribió un comentario de las Cónicas de Apolonio i otras obras que han desaparecido. Fué asesinada en 415, en una revuelta popular contra el gobernador Oreste.

La suerte de Hipatía nos recuerda que los cristianos de Oriente, una vez que se adueñaron del pais, i animados por un celo relijioso que les valió el imperio del mundo civilizado, se mostraron implacables enemigos de los que no seguían sus ideas o no les ayudaban en su propaganda.

Se puede decir que despues de estos sucesos en el Oriente, las escuelas científicas dejaron de existir.

La escuela ateniense en el siglo V.

A causa del asesinato de Hipatia i de la persecucion que sufrieron los escuelas de los paganos, los estudiantes de Alejandría se vieron obligados a buscar la luz de la ciencia en Atenas, donde, despues de la muerte de Platon, siempre vivieron matemáticos de profesion, sus miembros mas notables fueron Proclo, Damascio i Eutocio.

Proclo (412 485) nació en Constantinopla, i escribió un comentario sobre los *Elementos* de Euclides. La parte relativa al primer libro, editada por Friedlein en 1873, es estensa i contiene un gran número de datos históricos. Aunque de un estilo pesado i difuso, la obra posée el mérito de contener citas de otros autores mas competentes.

Marino e Isidoro fueron los sucesores de Proclo.

Damascio (490?) nació en Damasco, fué dicípulo de Isidoro, i agregó a los *Elementos* de Euclides un libro XV que trata de la inscripcion de un sólido regular en otro.

Eutocio (510?) fué tambien discípulo de Isidoro, comentó los cuatro primero libros de las Cónicas de Apolonio i algunas obras de Arquímedes.

En 529, el emperador Justiniano lanzó el decreto que prohibia la enseñanza de los paganos en Atenas; i esta fecha debe considerarse como el fin de la Escuela Ateniense.

Alejandría sintió las consecuencias de esta prohibicion; i si subsistió durante un siglo mas la enseñanza jentílica, ha de atribuirse a que las discordias relijiosas en Ejipto no fueron tan ardientes como en Constantinopla.

LAS MATEMÁTICAS ENTRE LOS ROMANOS

Roma, como soberana del mundo, educaba a sus hijos para gobernar ya por la autoridad de las leyes o por la persuacion de la palabra, ya por la fuerza de que siempre dispone el poderoso.

Los italianos que querian estender sus conocimientos, iban a Alejandría o a las escuelas dependientes de este centro intelectual.

A pesar de todo, la historia moderna tiene su oríjen en Roma, i las Ciencias salieron de la ciudad eterna, esparciéndose por la Europa de la Edad Media.

En las escuelas de Roma solo enseñaban las reglas elementales del cálculo aritmético i algunas aplicaciones prác- de la Jeometría. Debido a esta enseñanza, aunque rudimentaria, el arte del agrimensor alcanzó un alto grado de perfeccion. Tambien perfeccionaron el sistema decimal de numeracion, que les permitia contar mas de 10,000.

Los caracteres romanos empleados en los números, son una verdadera representacion digital, i su uso se estendió hasta la misma Bretaña. En Mecánica estudiaron la parte aplicada al arte del injeniero i del arquitecto.

En la obra *Mathematici Veteres*, que es una coleccion de pequeños tratados, se habla de las catapultas i de otras máquinas de guerra; del modo cómo se puede medir un rio invadeable i del uso del semáforo.

En el Siglo VI, Boecio publicó una jeometría con algunos proposiciones de Euclides i una aritmética fundada en la de Nicómaco. Casiodoro estableció las bases de una instruccion liberal que tenia como conocimientos preparatorios el *trivium*, compuesto de la gramática, la lójica i la retórica; i se completaba con el *quadrivium*, compuesto a su vez, de la aritmética, la jeometria, la música i la astronomía. Todas las obras destinadas a esta enseñanza fueron escritas en los últimos años de las Escuelas de Atenas i Alejandría, i las examinaremos en el Capítulo VIII.

En resúmen, el jenio de los romanos era esencialmente práctico, i durante el imperio i la dominacion de los godos, las ciencias abstractas se encontraron en condiciones desfavorables para su progreso.

Por otra parte, la situacion jeográfica de Alejandría la libró de las guerras intestinas i esteriores, la ciudad se mantuvó opulenta, i sus gobernadores se vanagloriaban de contribuir al establecimiento de la Universidad. A este emporio tranquilo acudian los pueblos para traficar con sus productos, i las razas helénica i semitica se establecieron dentro de sus muros. Mas, en el trascurso del tiempo, los acontecimientos desviaron a los amantes del estudio i del cultivo de la ciencia: las discusiones interminables i siempre funestas de los dogmas relijiosos, i la inseguridad del imperio alejaron a los espíritus de la investigacion científica.

FIN DE LA ESCUELA DE ALEJANDRÍA

Durante los dos últimos siglos de esta Escuela, no quedaron huellas de su progreso en el campo de las Matemáticas; i, poco despues de la muerte de Mahoma, sus sucesores conquistaron el Ejipto, i el 10 de Diciembre de 641 cayó Alejandría en su poder. Se presume que la famosa Biblioteca i el Museo habrian sido destruidos cien o doscientos años ántes, por los cristianos. Un año despues de la caida de Alejandría, se produjo una revuelta en la ciudad; los árabes demolieron los edificios universitarios hasta sus cimientos i quemaron el resto de los libros que aun quedaban. Esta incineracion duró seis meses.

CAPITULO VI

LA ESCUELA BIZANTINA

(642–1453)

Despues de la toma de Alejandria, los filósofos que profesaban en su Universidad se trasladaron en su mayor parte a Constantinopla, en donde fué durante ocho siglos el centro de la civilizacion griega en el Oriente.

Empero, la Historia de las Matemáticas, en este largo período, carece de interes; i los que las cultivaron no tuvieron mas mérito que el de haber conservado una parte de los libros clásicos: la revelacion de estas obras a las naciones occidentales en el siglo XV, fué el oríjen de la ciencia moderna. Puede, pues, considerarse la Escuela Bizantina como un simple intermediario de la ciencia entre los pueblos antiguos i los modernos.

Esta Escuela no tuvo relaciones con el resto de Europa, i los pocos nombres que nos presenta su historia, no servirán mas que para caracterizarla.

Heron de Constantinopla, (1000), llamado *el jóven*, para distinguirlo de Heron de Alejandría, parece que escribió sobre jeodesia i aplicaciones de la Mecánica a las máquinas de guerra.

P Selo, Miguel (1020) redactó un opúsculo sobre el cuadrivio i un compendio de Matemáticas, impreso en Leyde en 1647.

En el siglo XIV tres monjes se dedicaron a las Matemáticas:

Planudio (Máximo) comentó los dos primeros libros de Diofanto; i compuso un tratado de *Aritmética segun los hindúes*, en la que dió a conocer las cifras árabes. Compuso, ademas, un libro sobre las proporciones.

Barlaam (1290 1348), monje calabrés, compuso una *Lojística*, en que da a conocer el modo de calcular de los griegos, especialmente el cálculo de las fracciones. Esta obra fué editada en 1572 i 1600: Dotado de una clara intelijencia, se le confió el cargo de embajador ante el Papa, en Avignon, i aquí enseñó el griego al célebre poeta Petrarca.

Argiro (1372) escribió tres tratados de astronomía, uno de jeodesia i tres obras de jeometría, aritmética i trigonometría que se conservan manuscritas en diversas bibliotecas.

Rhabdas de Esmirna (siglos XIV-XV) se consagró a la aritmética i dió a conocer el simbolismo dijital de los romanos.

Paquimeres, a principios del siglo XV, compuso obras que tratan de aritmética, jeometría i mecánica.

Moscopulo (Manuel), (?—1460), escribió un libro sobre los *cuadrados májicos*.

Un cuadrado májico consta de varios números enteros dispuestos en cuadro; de modo que la suma de los números que forman las líneas, columnas i diagonales, es constante; como lo manifiestan los dos cuadros que siguen, formados con los primeros 16 números i cuya suma constante es 34:

1	15	14	4		15	10	3	6
12	6	7	9		4	5	16	9
8	10	11	5		14	11	2	7
13	3	2	16		1	7	13	12

Si los números van desde 1 hasta n^2, el cuadrado es de n^{mo} órden i la suma constante vale $\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

Esta propiedad de la suma constante la encontraron singular en aquella época, i el cuadrado májico adquirió una importancia estraordinaria.

Cornelio Agrippa (1486 1535) construyó cuadrados hasta de 9.º órden. Creia que el cuadrado del número 1 representaba la Divinidad; i que el no poder formarse un cuadrado de 2.º órden manifestaba claramente la imperfeccion de los cuatro elementos. A estas interpretaciones i a otras, no ménos absurdas, se prestaba la formacion de los cuadrados májicos, considerados hasta hoi sin ningun valor científico.

En 1453 se apoderaron los turcos de Constantinopla, desapareciendo el último vestijio de una escuela griega matemática. Muchos griegos se refujiaron en Italia, i las obras clásicas que llevaron consigo fueron una verdadera revelacion para el occidente de Europa, las que sirvieron de considerable estímulo.

(Continuará)