Dr. Gerold Stahl

La suficiencia de la lógica bivalente para la física de los cuantos

LAS INVESTIGACIONES lógicas en este siglo han ampliado el horizonte no sólo de la lógica formal, sino también de la epistemología, por ejemplo, con respecto al concepto "verdad". "$2 + 2 = 4$" puede ser verdadero o falso, pero "tertium non datur" según la lógica clásica. Una lógica en que las proposiciones pueden ser solamente verdaderas o falsas, o, en otras palabras, una lógica que tiene dos "valores veritativos" (verdad y falsedad) se llama "bivalente".

La lógica clásica fue concebida, en principio, como bivalente, pero no lo era hasta las últimas consecuencias; no era "estrictamente" bivalente. Sólo sistemas de la lógica simbólica, como por ejemplo el de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, son estrictamente bivalentes.

El pensamiento común con sus medios tonos distingue entre "La virtud es verde", "La virtud no es verde" y "No es el caso que la virtud es verde", afirmando sólo la última proposición, mientras que en un istema estrictamente bivalente deben afirmarse o la primera o las dos últimas proposiciones (si se supone la existencia formal de la virtud).

Puesta ante la alternativa entre "La virtud es verde" y "La virtud no es verde", la lógica clásica (es decir, la mayoría de sus representantes) elude la respuesta declarando ambas proposiciones como no significativas, mientras que —en completa inconsecuencia— concede significado a la proposición "No es el caso que la virtud es verde".

En el fondo habían entrado aquí consideraciones correspondientes a una lógica trivalente y se había efectuado una tripartición entre lo que es verde, lo que no es verde y lo de lo cual no se puede afirmar que es verde, ni que no es verde. El pasto en la primavera es verde, el pasto seco en pleno verano no es verde, y de la virtud no se puede afirmar que sea o no sea verde. Claro está, que tales consideraciones estaban reñidas con el principio del tercero excluído; para salvar este último había que apelar al "no significativo".

Sin embargo, no toda apelación al "no significativo" indica una valencia superior escondida. Como en un sistema formal no toda combinación de símbolos es significativa, sino se establecen condiciones bajo las cuales una expresión simbólica es "bien formada", es decir, significati a, así tampoco toda combinación de palabras es de antemano significativa y también en este caso hay que establecer condiciones. La simple introducción de una valencia superior no puede dar significado a una acumulación de palabras, aunque ésta sea "comprensible".

En esta exposición se habla *sobre* sistemas lógicos. Ellos son el material de la investigación y los consideramos expresados en lenguaje primario (object language), mientras que las investigaciones mismas se desarrollan en metalenguaje con respecto al lenguaje de estos sistemas. Nuestro metalenguaje en estas páginas será siempre bivalente, aunque hablamos *sobre* sistemas de valencia superior.

Simbolizamos el sistema bivalente de Whitehead y Russell por "L_2", la lógica trivalente de Reichenbach por "L_3", y en general un sistema lógico con n (n es un número natural mayor de 1), alores veritativos por "L_n". Convenimos en trabajar, en esta exposición, únicamente con sistemas lógicos en que los valores veritativos pueden ordenarse según el "grado de verdad" [1], simbolizando por "W_1" el valor con el grado más alto de verdad, por "W_2", "W_3", etc., los valores intermedios (si los hay) y finalmente por "W_n" el valor veritativo con el grado más bajo de verdad (con el grado más alto de falsedad). En L_2 tenemos "$n = 2$", en L_3 "$n = 3$", etc.

Es importante distinguir entre valores veritativos "designados" y "no designados". Si una proposición puede asertarse, entonces posee un valor veritativo designado, en el otro caso no. En L_2 el valor "verdad" (W_1) es designado, es decir, proposiciones que poseen este valor pueden asertarse, mientras que "falsedad" (W_2) no es designado. En L_3 (de Reichenbach) W_1 es designado y W_2 y W_3 no lo son.

Los conceptos clásicos de "verdad" y "falsedad" han sufrido, en cierto sentido, una escisión en dos conceptos cada uno: "asertabilidad" y "no-asertabilidad" por un lado y "verdad" (un valor designado especial) y "falsedad" (un valor no designado especial) por el otro. En L_2 coinciden las proposiciones asertables con las proposiciones verdaderas y las proposiciones no asertables con las proposiciones falsas; en una lógica de valencia superior se subdividen las proposiciones asertables según los diferentes valores veritativos designados que tienen, y las proposiciones no asertables según los diferentes valores no designados que tienen.

Podría parecer como si se hubiera vuelto a la bivalencia con la distinción entre valores designados y no designados, especialmente cuando se

[1] Lo indicado más adelante sobre L_s y L_{cs} no cambiaría si estos sistemas no cumpliesen con aquélla convención. G. Birkhoff, por ejemplo, sugiere sistemás especiales sin este ordenamiento.

toma en cuenta que una proposición no asertable, si se la niega apropiadamente (hay varias negaciones en una lógica polivalente), siempre se transforma en una proposición asertable, y viceversa. Se podría escribir, por ejemplo, para cada valor designado "A" y para cada valor no designado "B". Sin embargo, si se formaran matrices para el cálculo de proposiciones con estos dos "valores", se notaría en el caso de un sistema con una valencia mayor de dos, que estas matrices no todas son "categóricas". Una matriz se llama "categórica" si contiene para una función de proposiciones ($p \vee q$, $p \,.\, q$, $p \supset q$, $p \equiv q$) un solo valor claramente determinado. Para ejemplificar esto, señalaremos en seguida las matrices de algunos conceptos de L_3, utilizando primero tres valores veritativos, W_1, W_2 y W_3 (I), considerando después W_1 como designado (A) y W_2 y W_3 como no designados (B) (II), y finalmente, considerando W_1 y W_2 como designados (A) y W_3 como no designado (B) (III):

I)

p	q	p v q	p . q	p ⊃ q	p ≡ q
W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1
W_1	W_2	W_1	W_2	W_2	W_2
W_1	W_3	W_1	W_3	W_3	W_3
W_2	W_1	W_1	W_2	W_1	W_2
W_2	W_2	W_2	W_2	W_1	W_1
W_2	W_3	W_2	W_3	W_2	W_2
W_3	W_1	W_1	W_3	W_1	W_3
W_3	W_2	W_2	W_3	W_1	W_2
W_3	W_3	W_3	W_3	W_1	W_1

"p" y "q" representan proposiciones, "p v q" la disyunción (no exclusiva), "p q" la conjunción, "p ⊃ q" la implicación (implicación standard, según Reichenbach) y "p ≡ q" la equivalencia (standard) de dos proposiciones.

II)

p	q	p v q	p . q	p ⊃ q	p — q
A	A	A	A	A	A
A	B	A	B	B	B
B	A	A	B	A	B
B	B	B	B	AoB	AoB

III)

p	q	p v q	p . q	p ⊃ q	p ≡ q
A	A	A	A	A	A
A	B	A	B	AoB	AoB
B	A	A	B	A	AoB
B	B	B	B	A	A

Se nota que hay funciones de L_3 ($p \supset q$, $p \equiv q$) para las cuales una matriz bivalente no es categórica en todas las líneas (tenemos en algunas "A o B") y las hay también como se puede demostrar, en los otros sistemas polivalentes. Sin embargo, la posibilidad de reducir los valores veritativos a designados y no designados es de suma importancia para la comprensión de estos sistemas. Algunos nombres que se han dado a valores intermedios, como por ejemplo "indeterminado", no dejan ver esta posibilidad claramente.

Comparando todos estos sistemas, se presenta la pregunta por la posibilidad de su aplicación, especialmente en la formalización de datos empíricos. En principio pueden aplicarse tanto L_2 como sistemas de mayor valencia. Sin embargo, lo que es simple en L_2 es muy complicado en otros sistemas. No se pueden señalar en estas páginas todas las complicaciones y sacrificios de simplicidad en comparación con L_2 que implican estos sistemas. Tales complicaciones ya se presentan en el cálculo de proposiciones, pero aún en mayor grado en el cálculo de predicados. Podríamos tener varias relaciones de identidad y tal vez varias clases de números cardinales. No nos estaría permitido aplicar junto a una lógica no bivalente, simplemente la matemática que se ha utilizado hasta ahora, sino tendríamos que desarrollar una matemática que está en correspondencia con la lógica respectiva, etc. Todos estos sacrificios se justificarían únicamente si hubiese campos donde estos sistemas fueran aplicables y L_2 no lo fuera.

Paulette Destouches-Février y Hans Reichenbach han ideado sistemas polivalentes (especialmente trivalentes) y los han aplicado a la física de los cuantos, afirmando que sus sistemas lógicos pueden cumplir funciones en este campo que L_2 no es capaz de cumplir.

La finalidad de esta exposición no es demostrar que L_2 es suficiente para expresar todo lo referente a la física de los cuantos. Difícilmente se podría demostrar esto actualmente para una rama de la física que está aún en pleno desarrollo. *Lo que se intenta demostrar es únicamente que en todas las partes formalmente desarrolladas que los dos autores presentan para apoyar su hipótesis* (que de ninguna manera está desarrollada hasta las últimas consecuencias) *se alcanza perfectamente con L_2.* En lo que sigue se tratará el aspecto lógico y no el aspecto físico del material en cuestión.

D. considera necesario para la física de los cuantos varios sistemas lógicos que son diferentes entre sí y de L_2:

1. A las proposiciones "El corpúsculo C existe" y "El corpúsculo C no existe" habría que agregar una tercera proposición que expresa la posibilidad de pasar a la existencia. Para estas proposiciones se necesita, según la autora, un sistema trivalente L_{3e} o una lógica bivalente con operadores modales.

Sin embargo, contrariamente a las afirmaciones de D., L_2 (una lógica bivalente sin operadores modales) expresa la tercera posibilidad perfectamente como un caso especial de la no-existencia. Tenemos: a) existencia, b) no-existencia sin posibilidad de pasar a la existencia, c) no-existencia con posibilidad de pasar a la existencia [2].

2. Una proposición simbolizada por "p" que expresa el resultado de una medición puede ser *verdadera* si una clase determinada de punto no es vacía (si el resultado no está excluído por la cuantificación) y un punto determinado es elemento de esta clase, *falsa* si la clase de puntos no es vacía y el punto no es elemento de ella, y *absolutamente falsa* si la clase de puntos es vacía. Para estas proposiciones experimentales de la teoría de los cuantos de Bohr y Sommerfeld se necesita, según D., un sistema trivalente L_{3q} o una lógica bivalente con operadores modales.

Sin embargo, L_2 (sin operadores modales) expresa estas proposiciones perfectamente: "p" es *verdadera* si la clase respectiva no es vacía y el punto es elemento de ella y *falsa* si no es así, es decir, si la clase es vacía o el punto no es elemento de ella (o las dos cosas a la vez). Tales casos de negaciones de conjunciones se presentan frecuentemente en L_2 y no existe ninguna justificación de introducir para ellos un tercer valor veritativo. na proposición puede ser falsa por distintas razones.

3. Dos proposiciones experimentales, como por ejemplo las que afirman que se haya medido con exactitud el impulso de un corpúsculo (esta proposición la simbolizamos por "p") y la posición del mismo corpúsculo al mismo tiempo (la simbolizamos por "q"), no se pueden, según la relación de la inseguridad de Heisenberg, afirmar ambas. Ellas son "proposiciones complementarias" o "proposiciones incomponibles" (D. llama así proposiciones cuya conjunción no se puede afirmar). Para poder aplicar la conectiva "." a estas proposiciones hay que introducir, según D., nuevas matrices trivalentes para "." y "v" entre proposiciones incom-

[2] a) "Existe un (el) x que es el corpúsculo C en un momento determinado", "(Ex) Fx "(con descripción: "E! $(\imath x)$ (Fx)"); b) "No existe un x que... y no existe un x que puede ser una vez el corpúsculo C", "$\sim$ (Ex) Fx . $\sim$(Ex) Gx"; c) "$\sim$ (Ex) Fx . (Ex) Gx".

ponibles en especial, ampliándose así el sistema L_{3q} a la lógica de la complementaridad L_{c3}, que es, según D., irreductible a L_2.

Aunque no se puede afirmar la conjunción de dos proposiciones incomponibles (hay numerosas proposiciones incomponibles también fuera de la física de los cuantos) se les puede aplicar la conectiva "." en L_2 sin introducir matrices especiales. Sólo que "p.q" no es verdad, pero tampoco lo es en L_{c3}. Tenemos "$\sim$(p.q)" lo cual es equivalente a "p / q". Así dos proposiciones incomponibles son simplemente incompatibles en L_2. La matriz de "incompatible" en L_2 es:

p	q	p / q
W_1	W_1	W_2
W_1	W_2	W_1
W_2	W_1	W_1
W_2	W_2	W_1

Si una de dos proposiciones incompatibles es verdadera (W_1), la otra debe ser falsa (W_2); si una es falsa, la otra puede ser verdadera o falsa, todo en plena correspondencia con la relación de la inseguridad.

4. Si se admite la posibilidad de una influencia del proceso de la medición sobre el resultado, se llega, según D., a un nuevo sistema para las proposiciones experimentales, que es la lógica de la subjetividad L_s, la cual es irreductible a L_2 y de valencia infinita.

Sin embargo, esta lógica ha sido formalizada por D. misma (en su mayor parte [3]) a partir del cálculo de clases de L_2. Sus expresiones pueden tratarse luego completamente en este cálculo. La manera como la autora reduce forzosamente expresiones del cálculo de clases a expresiones del cálculo de proposiciones conduciría, en cualquier campo de la lógica, a numerosos sistemas del tipo de L_s, todos entre sí diferentes. ¡Y todo esto sin la menor necesidad!

5. Para la mecánica ondulatoria donde se presenta, según D., la complementaridad no sólo para proposiciones experimentales sino también para proposiciones teóricas (complementaridad de jure y no sólo de facto), se necesita la lógica de la complementaridad y subjetividad L_{cs}, igualmente diferente de L_2.

[3] La "suma lógica fuerte", que no se introduce formalmente, puede expresarse simbólicamente en L_2 (si nos apoyamos en la explicación en el idioma común), a partir de la disyunción ("suma lógica débil"), agregando que las dos relaciones de subclase están en relación "ha sido posible distinguir experimentalmente entre... y...".

Lo indicado en los puntos anteriores se aplica en forma modificada también a esta lógica [4].

Las ideas de Reichenbach en forma resumida son las siguientes:

Si exigimos que no se presenten las "anomalías causales" (contradicciones ligadas a los modelos corpuscular y ondulatorio) y si no deseamos incluir proposiciones no significativas en el lenguaje de la física, como lo hacen, según R., Bohr y Heisenberg, tenemos que usar una interpretación que excluye tales proposiciones no del dominio del significado sino del dominio de la asertabilidad. Así estamos, según R., obligados a llegar a una lógica trivalente.

Punto de partida es la relación que se establece entre tres proposiciones: "Se hace una medición de u" (simbolizamos esta proposición por "M"), "La indicación del instrumento de la medición señala el valor u" (simbolizado por "N") y "El valor de la entidad inmediatamente después del tiempo, para el cual el valor veritativo de la proposición M es considerado, es u" [5] (simbolizado por "U"). Entre estas tres proposiciones establece R. una relación por la siguiente matriz trivalente (con "indeterminado" como valor intermedio):

M	N	U
verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso
falso	verdadero	indeterminado
falso	falso	indeterminado

[4] D. se refiere a Birkhoff y v. Neuman, los cuales sostienen que L_2 no es adecuada para la física de los cuantos. Sobre los puntos principales de la posición de ellos puede decirse:

1. Su argumentación se dirige contra la convención tan fructífera de la interpretación de L_2 de que haya correspondencia biunívoca entre atributos y clases, reemplazándola por la otra que haya (en campos determinados) correspondencia entre atributos y clases (conjuntos) *mesurables*. Sin embargo, una convención puede justificarse epistemológicamente tanto como la otra (así se puede considerar suficiente que las clases se indican en la intención);

2. No señalan que las predicciones admiten un tratamiento bivalente (una proposición como "Con la probabilidad P. . .", es verdadera o falsa);

3. Tal vez conviene introducir (a partir del cálculo de clases de L_2), un cálculo especial de atributos observables de la mecánica cuántica, pero no existe justificación alguna para tratarlo como una lógica aparte (contraponiéndolo a otros sistemas lógicos).

[5] El uso de esta proposición en una expresión junto con M peca contra el principio de los niveles del lenguaje, que se utiliza para evitar paradojas como la del mentiroso. Sin embargo, este punto no es esencial para lo que sigue.

Esta matriz, que puede considerarse —en L_3— como definición de U a partir de N y M, es altamente insatisfactoria con respecto a las dos últimas líneas de la última columna. Si M tiene el valor veritativo "falso" y N "verdadero" o "falso", entonces (si quedamos de acuerdo con la interpretación física de estas tres proposiciones) *es indeterminado si U tiene el valor veritativo "verdadero" o "falso"*, pero U no tiene el valor veritativo "indeterminado". No hay ninguna justificación para salir de L_2, donde representamos la relación entre estas tres proposiciones por:

$$\begin{array}{lll} M & N \supset & U \\ M & N \supset & \sim U \\ M & N \supset & U \vee \sim U \\ M & N \supset . & U \vee \sim U \end{array} \qquad (1)$$

Formando la conjunción de estas cuatro expresiones y transformando, obtenemos una sola expresión:

$$M \,.\supset.\, N \equiv U \qquad (2)$$

que representa perfectamente la relación entre estas tres proposiciones en L_2.

Después de estas indicaciones preliminares R. llega a la formulación trivalente de la complementaridad, llamando dos proposiciones (A, B) "complementarias" si satisfacen la siguiente relación:

$$A \vee \sim A \,.\rightarrow.\, \sim\ \sim B \qquad (3)$$

"$\sim$ A" se interpreta por "A es falsa", "$\sim \sim$ B" por "B es indeterminada" y "$\rightarrow$" representa la implicación alternativa, una operación trivalente que tiene "W_3" en la segunda y tercera línea y en las otras "W_1". La expresión entera se puede leer: *Si A es verdadera o falsa (pero determinada), entonces B es indeterminada.*

La relación lógica de la complementaridad es, como se puede demostrar, simétrica (si A es complementaria a B, entonces B es complementaria a A, y viceversa) y tenemos así:

$$B \vee \sim B \,.\rightarrow.\, \sim \sim A \qquad (4)$$

Contrariamente a la afirmación de R., la relación de la complementaridad tiene su análogo en L_2. Conceptos como "indeterminado" y "determinado" se refieren en este caso al valor numérico de la entidad y no a la proposición (ellos pertenecen al lenguaje primario y no al metalenguaje[6]). Aplicamos, por un lado, la formulación ("p / q") utilizada en el caso de D.:

$$A_1 \,/\, B_1 \qquad (5)$$

la cual es equivalente a:

$$A_1 \supset \sim B_1 \qquad (6)$$

y, por el otro, un principio que establece una relación entre X_2 ("La indicación del instrumento de medición señala el valor u") y X_1 ('El valor (numérico) de la entidad... es determinado"):

$X_2 \supset X_1$ (para todos los pares de proposiciones como A_1 — A_2, B_1 — B_2, etc.) (7).

Entonces obtenemos según transformaciones de L_2:

$$A_2 \,.\, v \,.\, \sim A_2 \,.\, A_1 \,:\, \supset \,:\, \sim B_1 \qquad (8)$$

que leemos: *Si A_2 es verdadera o falsa, pero el valor (numérico) de su entidad determinado, entonces el valor (numérico) de la entidad en B_2 no es determinado.* Si no queremos hablar de "mediciones", utilizamos la misma formulación, sólo que en este caso "X_2" ("A_2", "B_2", etc.) representa "el valor de la entidad... es u" [7].

Una formulación simétrica de (8) con respecto a A y B:

$$B_2 \,.\, v \,.\, \sim B_2 \,.\, B_1 \,:\, \supset \,:\, \sim A_1 \qquad (9)$$

puede derivarse de (6) y (7) tomando en cuenta que "$A_1 \supset \sim B_1$" e simétrico.

Todas las aplicaciones de la formulación trivalente de R. se mantienen para la formulación bivalente y tenemos como resultado también en L_2 que la conjunción de dos proposiciones complementarias no puede ser verdadera.

Finalmente señalamos el caso de partículas que pasan por ranuras, eligiendo un ejemplo con una pantalla de tres ranuras. "B_i" representa la proposición "La partícula pasa por la ranura i (1, 2 ó 3)". Sabemos que si la partícula pasó por una ranura, no pasó por las dos restantes y, si no pasó por dos, debe haber pasado por la tercera. Esto no implica, según R., que:

$$B_1 \vee B_2 \vee B_3 \qquad (10)$$

[6] Un tratamiento bivalente del último caso también sería posible y seguiría a normas similares.

[7] $[Vl\ (e_a,\ t) = u]\ .\, v\, .\ \sim [Vl\ (e_a,\ t) = u]\ .\ [Vl\ (e_a,\ t)\ \varepsilon\ det]\ :\ \supset\ :\ \sim [Vl\ (e_b,\ t)\ \varepsilon\ det]$.

es verdadero en todo caso, es decir, que una de las tres proposiciones de la disyunción debe ser verdadera. La disyunción puede ser, según R., indeterminada (puede ser indeterminado por donde pasó la partícula). Tampoco se puede afirmar "B_2 v B_3", si se ha observado únicamente "$\sim B_1$". Sólo si tenemos "$\sim B_1$" y "$\sim B_2$" podemos afirmar "B_3".

Esta situación puede expresarse perfectamente en L_2 por las siguientes cuatro fórmulas:

$$\begin{array}{llllll} B_1 & - & \sim B_2 & B_3 & \sim I & \quad (11) \\ B_2 & - & \sim B_1 & B_3 & \sim I & \\ B_3 & & B_1 & B_2 & I & \end{array}$$
$$\sim B_2 . \sim B_3 . v . \sim B_1 . \sim B_3 . v . \sim B_2 . \sim B_3 : \supset : \sim I$$

en que "I" significa "es indeterminado por donde pasó la partícula" (la disyunción completa que corresponde a (10), y que debe ser verdadera si lo son las premisas expuestas, sería "B_1 v B_2 v B_3 v I"). Para expresar la misma correlación en L_3 utiliza R., las tres primeras fórmulas de (11), sin "$\sim$ I", con la implicación alternativa mutua ($\leftrightarrows$) en lugar de la equivalencia y con la negación diametral (una negación trivalente con la matriz: W_3 W_2 W_1) en lugar de "$\sim$".

Para otro número de ranuras y para casos similares citados en R. se puede generalizar tanto la formulación trivalente como la bivalente. Los ejemplos restantes de la aplicación de L_3, que son todos más simples, pueden expresarse fácilmente en L_2 según los esquemas arriba indicados.

Con todo esto se ha demostrado que L_2 es suficiente para expresar las proposiciones experimentales y teóricas de la física de los cuantos para las cuales, según D. y R., hay que recurrir a una lógica no bivalente.

BIBLIOGRAFIA

BIRKHOFF, G., *Lattice Theory,* Nueva York, 1948.

BORN, M., *Natural Philosophy of Cause and Chance,* Oxford, 1949.

DESTOUCHES-FÉVRIER, P., *La structure des théories physiques,* Paris, 1951.

MCKINSEY, J. C. C. y SUPPES, P., reseña de "La structure des théories physiques", Journal of Symbolic Logic, vol. 19 (1954), pp. 52-55.

REICHENBACH, H., *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics,* Berkeley y Los Angeles, 1948.

ROSSER, J. B. y TURQUETTE, A. R., *Many-valued Logics,* Amsterdam, 1952.